Kode/Nama Rumpun Ilmu: 121 / Matematika

LAPORAN AKHIR
PENELITIAN DISERTASI DOKTOR

SOLUSI OPTIMISASI SOCP NORMA 1 DENGAN METODE TITIK INTERIOR

Tahun ke-1 dari rencana 1 tahun

Caturiyati, M.Si.
NIDN. 0018127302

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
NOPEMBER, 2013

Dibiayai oleh:
Direktorat Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat
Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi
Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Sesuai dengan Surat Perjanjian Pelaksanaan Penugasan Penelitian Disertasi Doktor
Nomor: 019/APDD-BOPTN/UN34.21/2013, tanggal: 18 Juni 2013

HALAMAN PENGESAHAN

Judul Kegiatan	: Solusi Optimisasi SOCP Norma 1 dengan Metode Titik Interior
Peneliti / Pelaksana	
Nama Lengkap	: CATURIYATI S.Si.,M.Si.
NIDN	: 0018127302
Jabatan Fungsional	:
Program Studi	: Matematika
Nomor HP	: 085743100303
Surel (e-mail)	: wcaturiyati@yahoo.com
Institusi Mitra (jika ada)	
Nama Institusi Mitra	:
Alamat	:
Penanggung Jawab	:
Tahun Pelaksanaan	: Tahun ke 1 dari rencana 1 tahun
Biaya Tahun Berjalan	: Rp. 30.000.000,00
Biaya Keseluruhan	: Rp. 0,00

Mengetahui
Dekan FMIPA UNY

(Dr. Hartono)
NIP/NIK 196203291987021002

Yogyakarta, 26 - 11 - 2013,
Ketua Peneliti,

(CATURIYATI S.Si.,M.Si.)
NIP/NIK197312182000032001

Menyetujui,
Ketua LPPM UNY

(Prof. Dr. Anik Ghufron)
NIP/NIK 196211111988031001

RINGKASAN

Tujuan jangka panjang dari disertasi yang sedang dikerjakan adalah menentukan solusi optimal masalah optimisasi *cone* invers, yang mencakup SOCP (*Second Order Cone Programming*) invers dan SDP (*Semidefinite Programming*) invers. Untuk mencapainya diperlukan pendalaman masalah SOCP dan SDP. Penelitian-penelitian yang telah dikerjakan adalah optimisasi *cone* dengan norma 2 ($\|.\|_2$). Namun di dalam disertasi peneliti akan dibahas optimisasi *cone* dengan norma 1 ($\|.\|_1$) dan norma ∞ ($\|.\|_\infty$), yaitu SOCP dengan norma 1 invers, SOCP dengan norma ∞ invers, SDP dengan norma 1 invers, dan SDP dengan norma ∞ invers. Pada penelitian ini mempunyai tujuan utama mencari cara menentukan solusi optimal dari masalah optimisasi SOCP dengan norma 1 menggunakan metode titik interior. Namun untuk dapat mencapainya, ada beberapa tujuan yang juga harus dicapai sebelumnya, mulai dari pemodelan masalah, penentuan kekonveksan daerah fisibel masalah, dan menentukan algoritma masalah. Setelah menentukan solusi optimal, yang selanjutnya adalah menentukan eksistensi dan ketunggalan solusi optimal masalah SOCP, namun karena bukan hal mudah untuk mendapatkan kedua hal ini, maka kedua hal tersebut merupakan tujuan tambahan dalam penelitian ini. Metode yang digunakan untuk mencapai tujuan-tujuan tersebut adalah studi literatur dengan mempelajari dan mengkaji berbagai literatur (buku dan jurnal) terkait, yang merupakan hasil-hasil yang telah diperoleh oleh peneliti-peneliti sebelumnya, yang dapat digunakan untuk mencapai tujuan yang diharapkan berupa teori baru dalam bidangnya.

Pada penelitian ini diawali dengan pengumpulan literatur, mempelajari dan mengkaji literatur yang terkait, melakukan penelitian terhadap tujuan penelitian berdasar teori dari hasil-hasil peneliti terdahulu yang sudah ada, menuliskan hasil penelitian, mempublikasikan hasil penelitian dalam seminar nasional dan jurnal.
Keywords: optimisasi, SOCP, metode titik interior

SUMMARY

Long-term goals of the dissertation is being done is to determine the optimal solution of the inverse *cone* optimization problem, which includes the SOCP (*Second Order Cone Programming*) inverse and SDP (*Semidefinite Programming*) inverse. To achieve these goals required a deepening SOCP and SDP problem. The studies that have been done is the *cone* optimization norm 2 ($\|.\|_2$). But in this dissertation *cone* optimization will be discussed with the norm 1 ($\|.\|_1$) and norm ∞ ($\|.\|_\infty$), i.e. SOCP norm 1 inverse, SOCP norm ∞ inverse, SDP norm 1 inverse, and SDP norm ∞ inverse. In this study the main goal seek the optimal solution of the SOCP norm 1 optimization problem using interior point methods. But in order to achieve it, there are several objectives that must be achieved before, ranging from modelling problem, determine the feasible region convexity of the problem, and determining the algorithms problems. After determining the optimal solution, then is to determine the existence and the unity of the solution of the SOCP problem, but because it is not easy to get these two things, then both it is an additional objective in this study. The method used to achieved these goals is the study of literature by studying and reviewing the literature (books and journals) related, which is the results that have been obtained by previous researchers, which can be used to achieve the expected goals in the form of a new theory in the field.

In this study begins with collecting literature, studying and reviewing the relevant literature, conduct research on the purpose of research-based theory of the results of previous research that already exists, write down the results of the research, publish research results in national seminars and journal.

Keywords: optimization, SOCP, interior point method

PRAKATA

Penelitian berjudul Solusi Optimisasi SOCP Norma 1 dengan Metode Titik Interior merupakan bagian disertasi berjudul Program *Conic* Invers pada $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$, merupakan penelitian teoritis berdasarkan kajian literatur. Hasil dari penelitian ini merupakan teori baru dalam bidangnya, yaitu terapan matematika, lebih khususnya teori optimisasi.

Beberapa bagian dari hasil penelitian ini mengambil hasil dari peneliti sebelumnya dengan mengubah beberapa bagian dengan sejumlah kajian, sehingga menjadi hasil baru yang berlaku universal. Dalam hal ini peneliti mempersempit masalah dengan menambahkan sejumlah syarat.

Penelitian ini menghasilkan beberapa paper publikasi. Sebagian dipublikasikan untuk mendukung penelitian ini, sebagian masih dapat dipublikasikan bahkan setelah penelitian ini selesai dilaksanakan. Yang telah dipresentasikan pada seminar nasional maupun internasional, sebagian dipublikasikan dalam bentuk prosiding seminar, sebagian akan dipublikasikan pada jurnal nasional maupun internasional, dan sedang dalam proses editing.

Masih banyak kekurangan dalam penelitian ini, saran kritik dan masukan sangat peneliti harapkan demi membangun semangat peneliti dalam meneliti pada penelitian-penelitian berikutnya, maupun dalam membuat paper ilmiah yang disemunarkan maupun dijurnalkan.

Nopember 2013

Peneliti

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Permasalahan

Selama ini program linear telah dikenal secara luas sebagai masalah optimisasi, yaitu masalah optimisasi berkendala dengan fungsi tujuan dan fungsi kendala adalah fungsi linear. Ketika terjadi perang dunia II, optimisasi ini sangat terasa manfaatnya, yaitu untuk menentukan optimasi jumlah tentara yang diterjunkan ke medan perang, menentukan optimasi volume logistik yang harus disediakan, menentukan optimasi tenaga kesehatan yang harus disiapkan, dsb. Karena manfaat yang dirasa sangat besar, maka perkembangan masalah optimisasi pun menjadi sangat pesat, dan merambah ke berbagai sektor kehidupan. Seiring waktu permasalahan yang muncul di dunia nyata tidak lagi terbatas pada masalah-masalah yang dapat dimodelkan dalam fungsi linear saja, namun juga menjadi fungsi non linear. Berkembanglah masalah program non linear, yaitu masalah optimisasi berkendala dengan fungsi tujuan dan/atau fungsi kendala non linear. Optimisasi ini selanjutnya berkembang sangat pesat, dikarenakan lebih banyak permasalahan nyata yang dapat diselesaikan dengan mengaplikasikannya. Selanjutnya terdapat pengembangan pada masalah optimisasi non linear, yaitu dengan menambahkan syarat bahwa fungsi kendala dibatasi merupakan fungsi konveks. Dengan pengembangan tersebut, masalah yang dapat diselesaikan menjadi lebih luas lagi, sehingga untuk selanjutnya dikembangkan lagi masalah optimisasi dengan menambahkan syarat yaitu fungsi kendala adalah fungsi yang berbentuk kerucut atau *cone*, yang disebut dengan *Linear Cone* (LC), *Second Order Cone Programming* (SOCP), dan *Semidefinite Cone Programming* (SDP), yang merupakan masalah optimisasi non linear berkendala dengan fungsi kendala merupakan suatu *cone*. Pengembangan masih berlanjut terus, mengingat banyaknya masalah di dunia nyata yang tidak dapat ditentukan optimasinya secara langsung, sebagai contoh, masalah pengukuran kedalaman titik pusat gempa, yang bukan hal mudah untuk ditentukan secara langsung, namun dengan menggunakan data-data gelombang gempa yang dihasilkan, maka dapat dihitung kedalaman pusat gempa tersebut. Perhitungan semacam ini disebut sebagai masalah optimisasi invers. Dalam hal contoh tersebut, data-data gelombang gempa adalah parameter yang diketahui, sedangkan hasil pengukuran pusat gempa adalah solusi yang diperoleh berdasarkan parameter yang diketahui tersebut.

Pada masalah optimisasi yang umum dipelajari adalah masalah optimisasi dengan fungsi norma 2, namun tidak menutup kemungkinan untuk membahas optimisasi dengan fungsi norma p ($1 \leq p \leq \infty$), berdasarkan studi literatur banyaknya hasil-hasil penelitian tentang masalah optimisasi dengan fungsi norma p, dengan manfaatnya di dunia nyata.

Dengan fakta tersebut maka penelitian ini meneliti masalah SOCP dengan norma 1, terutama pada solusi masalah SOCP norma 1 dengan metode titik interior, yang merupakan bagian dari disertasi program doktor peneliti yaitu mengkaji program *cone* invers pada masalah SOCP dan SDP norma p (diambil norma 1 dan norma ∞) menggunakan metode titik interior.

1.2 Perumusan Masalah

Dari uraian di atas, secara umum rumusan permasalahan penelitian ini adalah "Bagaimana menentukan solusi masalah SOCP norma 1 dengan metode titik interior?”

Secara terperinci proposal disertasi ini akan mengusulkan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana perumusan SOC norma 1?
2. Bagaimana perumusan masalah SOCP norma 1?
3. Bagaimanakah algoritma masalah SOCP norma 1 dengan metode titik interior?
4. Bagaimana solusi masalah SOCP norma 1 dengan metode titik interior?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan masalah-masalah di atas maka cakupan tujuan penelitian ini secara rinci dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Menghasilkan perumusan SOC norma 1.
2. Menghasilkan perumusan masalah SOCP norma 1.
3. Menghasilkan algoritma masalah SOCP norma 1 dengan metode titik interior.
4. Menghasilkan solusi masalah SOCP norma 1 dengan metode titik interior.

BAB 2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Tinjauan Pustaka

Masalah invers telah dipelajari secara ekstensif dengan data-data geofisika. Tarantola [1987] dalam Ahuja and Orlin [2001] menggambarkan masalah invers sebagai berikut:

"*Misalkan S menyatakan sistem fisik. Diasumsikan dapat didefinisikan suatu himpunan parameter model yang menggambarkan S secara lengkap. Parameter-parameter ini tidak semuanya dapat mengukur secara langsung (sebagai contoh, radius dari pusat metal bumi). Secara operasional dapat didefinisikan beberapa parameter terobservasi yang nilai nyatanya bergantung pada nilai parameter model. Menyelesaikan masalah maju adalah memprediksi nilai parameter terobservasi, dari nilai sebarang parameter model yang diberikan. Menyelesaikan masalah invers adalah menentukan nilai parameter model dari nilai terobservasi yang diberikan dari parameter terobservasi*."

Selanjutnya Tarantola [2005] menyatakan prosedur scientifik untuk mempelajari sistem fisik dibagi menjadi tiga langkah berikut:

i. Parameterisasi sistem: menemukan himpunan minimal parameter model dengan nilainya mengkarakterkan sistem secara lengkap (dari suatu titik yang diberikan).
ii. Pemodelan maju: menemukan hukum fisik yang mengijinkan melakukan prediksi pada hasil pengukuran pada beberapa parameter terobservasi (untuk nilai parameter model diberikan).
iii. Pemodelan invers: menggunakan hasil nyata dari beberapa pengukuran parameter terobservasi untuk mendapatkan nilai nyata parameter model.

Masalah optimisasi secara umum merupakan masalah maju karena dapat mengidentifikasi nilai-nilai parameter terobservasi (variabel keputusan optimal) dengan diberikan nilai parameter model (koefisien biaya, vektor ruas kanan, dan matriks kendala). Suatu optimisasi invers memuat penentuan nilai parameter model (koefisien biaya, vektor ruas kanan, dan matriks kendala) dengan diberikan nilai parameter terobservasi (variabel keputusan optimal). Dalam beberapa tahun terakhir, terdapat ketertarikan dalam masalah optimisasi invers oleh komunitas riset operasi, dan berbagai masalah optimisasi invers dipelajari oleh para peneliti.

Ilmuwan geofisik yang pertama kali mempelajari masalah invers. Tarantola [1987] dalam Tarantola [2005] memberikan pembicaraan yang komprehensif tentang teori masalah invers dalam ilmu geofisik. Dalam komunitas program matematik, ketertarikan dalam masalah optimisasi invers dibangun oleh paper Burton and Toint [1992, 1994] yang mempelajari masalah jarak terpendek invers dikembangkan dalam tomografi seismik digunakan dalam memprediksi pergerakan gempa bumi. Dalam beberapa tahun terakhir, masalah optimisasi invers telah dipelajari agak intensif. Dalam paper Ahuja and Orlin [2001], menyajikan beberapa masalah invers. Pertama pandang masalah program linear invers dengan norma L_1 (yang meminimumkan $\sum_{j\in J} w_j\left|d_j - c_j\right|$) dan norma L_∞ (yang meminimumkan $\max_{j\in J}\{w_j\left|d_j - c_j\right|\}$). Kemudian mengkhususkan hasil ini untuk masalah berikut dan mendapatkan algoritma yang lebih cepat: Masalah jarak terpendek, masalah penugasan, masalah pemotongan minimum, dan masalah arus biaya minimum. Akhirnya, masalah optimisasi invers umum ddengan norma L_1 dan norma L_∞. Selanjutnya merujuk masalah invers dengan norma L_1 sederhana seperti masalah invers dan masalah invers dengan norma L_∞ sebagai masalah invers minimaks.

Telah ada beberapa riset pada program linear invers dan masalah arus jaringan invers dengan norma L_1. Zang dan Liu [1996] mempelajari masalah penugasan invers dan masalah arus biaya minimum; Yang, Zhang dan Ma [1997], dan Zhang dan Cai [1998] mempelajari masalah pemotongan minimum invers; dan Xu dan Zhang [1995] mempelajari masalah jarak terpendek invers. Pada paper Ahuja and Orlin [2001], mengembangkan framework dengan algoritma untuk semua masalah arus network invers yang diturunkan sebagai kasus khusus, dengan algoritma yang sesuai dengan algoritma terbaik sebelumnya atau improvisasinya, dan pada waktu yang sama mendapatkan bukti sederhana. Ahuja and Orlin [2001] juga mempelajari program linear invers dan masalah arus network invers di bawah norma L_∞ yang merupakan hasil baru.

Selanjutnya Ahuja and Orlin [2001] paper risetnya mempelajari masalah pohon perentang invers (Sokkalingam, Ahuja dan Orlin [1999], Ahuja dan Orlin [1998a]) dan masalah *sorting* invers (Ahuja dan Orlin [1997]). Ahuja dan Orlin [1998b] memandang masalah arus network invers untuk kasus bobot satuan dan mengembangkan bukti kombinatorik yang tidak berbeda dengan teori program linear invers.

Sekarang perhatikan masalah optimisasi (Iyengar and Kang, 2003) berbentuk

$$\begin{aligned}&\text{meminimimalkan } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})\\ &\text{dengan kendala } \mathbf{x} \in \mathcal{S},\end{aligned} \tag{1}$$

dengan $\boldsymbol{\theta}$ parameter, $\mathbf{x}$ variabel keputusan, dan $\mathcal{S}$ adalah suatu himpunan fisibel. Tujuan dari masalah ini (masalah maju) adalah untuk menghitung keputusan optimal sesuai dengan estimasi parameter tak diketahui $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$.

Sedangkan masalah optimisasi invers terkait (1) adalah masalah berikut:

(a) Diberi keputusan diamati $\hat{\mathbf{x}}$, karakteristikkan himpunan $\Theta(\hat{\mathbf{x}})$ dari nilai-nilai parameter $\boldsymbol{\theta}$ dengan $\hat{\mathbf{x}}$ yang optimal, dan

(b) Jika diinginkan, menyelesaikan masalah optimisasi

$$\begin{aligned}&\text{meminimumkan } \|\boldsymbol{\theta} - \overline{\boldsymbol{\theta}}\|\\ &\text{dengan kendala } \boldsymbol{\theta} \in \Theta(\hat{\mathbf{x}}),\end{aligned} \tag{2}$$

dengan $\overline{\boldsymbol{\theta}}$ nilai parameter nominal dan $\|.\|$ adalah norma yang sesuai.

Masalah optimisasi invers setidaknya muncul pada dua konteks berbeda berikut ini:

1. Sistem identifikasi,

   andaikan gelombang seismik yang dihasilkan oleh gempa diasumsikan berjalan sepanjang jarak terpendek, kemudian mengestimasi sifat medan dari jarak gelombang seismik yang diamati dapat dirumuskan sebagai masalah optimisasi invers.

2. Pemilihan parameter $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ untuk memaksa respon yang diinginkan $\hat{\mathbf{x}}$,

   andaikan arus lalu lintas dalam suatu jaringan diasumsikan merupakan solusi masalah optimisasi dengan busur biaya sebagai parameter, maka masalah menentukan minimal biaya yang menjamin aliran yang ditentukan adalah contoh optimisasi invers.

Seperti telah disampaikan di muka masalah optimisasi invers pertama kali diformulasikan dalam konteks masalah jarak terpendek. Selanjutnya, masalah optimisasi invers terhadap beberapa masalah optimisasi kombinatorik telah dipelajari. Untuk klas ini masalah optimisasi invers fungsi tujuan $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ diberikan oleh $\boldsymbol{\theta}^T\mathbf{x}$ (yaitu linear dalam $\boldsymbol{\theta}$). Masalah seperti ini disebut program linear invers (LP). Mengikuti dualitas LP bahwa invers LP dapat diformulasikan kembali sebagai LP dengan norma $\|.\|$ di (2) adalah norma L_1 atau norma L_∞.

Selanjutnya menurut Iyengar and Kang [2003] terdapat fakta bahwa klas yang lebih umum dari masalah-masalah sebelumnya disebut program *conic* memiliki teori dualitas sangat mirip dengan teori dualitas LP. Hal ini ditunjukkan dengan mengganti dualitas LP dengan dualitas *conic* memungkinkan untuk menarik kesimpulan bahwa program *conic* invers, dengan hanya fungsi tujuan tidak pasti (*uncertain*) dan gradien fungsi tujuan adalah fungsi *affine* dengan parameter $\boldsymbol{\theta}$, dapat dirumuskan kembali sebagai program *conic* dengan norma di (2) adalah norma $L_q, q \geq 1$, rasional.

Iyengar dan Kang [2003] juga menekanan masalah yang dimunculkan pada papernya tidak pada inovasi matematika, tetapi pada pemodelan masalah invers. Karena program kuadratik, program berkendala kuadratik, dan program semidefinit semua dapat diformulasikan kembali sebagai program *conic* dan program-program ini dapat diselesaikan secara efisien baik dalam teori dan dalam praktek, maka perluasan yang ada pada paper berakibat klas yang lebih luas dari masalah optimisasi invers dapat diselesaikan secara efisien dalam prakteknya.

Bentuk umum masalah optimisasi *conic* yang didefinisikan pada ruang vektor berdimensi hingga *X* dengan urutan *conic* adalah

$$\begin{aligned} &\text{meminimumkan } f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \\ &\text{dengan kendala } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \succeq_C \mathbf{0} \\ &\qquad\qquad\qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{3}$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ variabel keputusan, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^l, \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ parameter, dan juga himpunan $\boldsymbol{\Theta} = \mathbb{R}^p$ atau $\boldsymbol{\Theta} \subset \mathbb{R}^p$ dideskripsikan sebagai kendala *conic*. Untuk $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}$ tertentu, fungsi $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diasumsikan konveks dan terdiferensial di $\mathbf{x}$, dan untuk $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tertentu, gradien $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ terhadap $\mathbf{x}$ diasumsikan sebagai fungsi *affine* $\boldsymbol{\theta}$.

Notasi $\succcurlyeq_C$ ($\succ_C$) menotasikan urutan parsial (urutan tegas) di $\mathbb{R}^m$ dibangun oleh *cone* $C \subset \mathbb{R}^m$, yaitu $\mathbf{x} \succcurlyeq_C \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \succ_C \mathbf{y}$) jika dan hanya jika $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in C$ ($\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \operatorname{int}(C)$).

Diasumsikan $C = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_k$, dengan setiap *cone* C_j bagian dari tiga klas berikut:

(i) *Cone* linear: $C_l = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r | x_i \geq 0, i = 1, \ldots, r\}$;

(ii) *Cone* urutan kedua (SOC): $C_{so} = \left\{\mathbf{x} = (x_0; \bar{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}^{r+1} \middle| x_0 \geq \sqrt{\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{x}}}\right\}$;

(iii) *Cone* semidefinit: $C_{sd} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{r^2} \middle| \operatorname{mat}(\mathbf{x}) \succcurlyeq \mathbf{0}\right\}$ dengan $\operatorname{mat}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ dan $\operatorname{mat}(\mathbf{x})_{ij} = \mathbf{x}_{r(i-1)+j}$, dan $\mathbf{A} \succcurlyeq \mathbf{0}$ menotasikan $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ dan semidefinit positif.

Cone dual C^* dari *cone* C adalah $C^* = \{\mathbf{y} | \mathbf{y}^T \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r\}$. *Cone* C_l, C_{so} dan C_{sd} adalah dual-sendiri (self-dual) akibatnya

$$C^* = (C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_k)^* = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_k = C$$

yaitu C dual-sendiri.

Fungsi $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diasumsikan terdiferensial dan konkaf terhadap urutan parsial $\succcurlyeq_C$, yaitu untuk setiap $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, dan $\lambda \in [0,1]$,

$$\mathbf{g}(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2) \succcurlyeq_K \lambda \mathbf{g}(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)\mathbf{g}(\mathbf{x}_2).$$

Dinotasikan $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x})]^T$. Fungsi $\mathbf{g}$ tidak bergantung pada parameter $\boldsymbol{\theta}$. Masalah dalam bentuk (3) disebut program *conic* (CP).

Masalah CP mempunyai cakupan yang lebih luas dari masalah LP. Masalah CP mempunyai 3 bentuk program, yaitu:

1. Program Linear: jika C merupakan orthan nonnegatif, masalah CP berbentuk sama dengan masalah LP.
2. Program Kuadratik *Conic* atau Masalah Kerucut Order Kedua (SOCP): Jika C merupakan hasil kali langsung kerucut Lorentz Q^{n_i}, dengan $Q^{n_i} = \{(\mathbf{x}, t): \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^n: \|\mathbf{x}_i\| \leq t\}$, $\quad C = Q^{n_1} \times Q^{n_2} \times \cdots \times Q^{n_l}$. Secara matematis, bentuk masalah SOCP adalah

   meminimumkan $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$

   dengan kendala $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \succeq_C \mathbf{0}$

   $$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \in C,$$

   dengan $C = Q^{n_1} \times Q^{n_2} \times \cdots \times Q^{n_l}$ dan $Q^{n_i} = \{(\mathbf{x}, t): \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^n: \|\mathbf{x}_i\| \leq t\}$.

   SOCP juga dikenal dengan masalah kerucut Lorentz atau masalah kerucut es krim.
3. Program Semidefinit (SDP): Jika C merupakan hasil kali langsung (*direct product*) kerucut semidefinit S_+^n, dengan $S_+^n = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^n\mathbf{Ax} \geq 0: \forall\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$, dan $\mathbf{A}$ matriks semidefinit positif. $C = S_+^{n_1} \times S_+^{n_2} \times \cdots \times S_+^{n_l}$. Secara matematis, bentuk masalah SOCP adalah

   meminimumkan $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$

   dengan kendala $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \succeq_C \mathbf{0}$

   $$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \in C,$$

   dengan $C = S_+^{n_1} \times S_+^{n_2} \times \cdots \times S_+^{n_l}$ dan

   $S_+^n = \{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^n\mathbf{Ax} \geq 0: \forall\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.

Untuk masalah program *conic* pengembangan penelitiannya sudah sangat luas. Namun untuk program *conic* invers penelitian yang telah dilakukan masih terbatas, terutama dalam pengembangan matematisnya. Hal ini mengakibatkan masih mungkin sekali untuk dilakukan pengembangan matematis masalah program *conic* invers. Tujuannya utama pada penelitian ini adalah menunjukkan secara matematis apakah masalah CP invers (terutama SOCP dan SDP) dapat diformulasikan kembali sebagai masalah program *conic* (CP) sehingga dapat diselesaikan secara efisien dengan mencari algoritma penyelesaian masalah yang sesuai dan tepat. Di samping itu, masalah ini sangat mungkin untuk dikembangkan mengingat pada kenyataan yang dihadapi oleh manusia yaitu banyak sekali masalah yang tidak mungkin dapat ditentukan parameter-parameter masalah di awal, namun hanya merupakan nilai berdasarkan pengamatan atau penelitian. Dalam penelitian ini akan diselidiki apakah SOCP dan SDP sebagai suatu bentuk khusus masalah program *conic* akan dapat diperoleh masalah SOCP invers dan SDP invers pada ruang bernorma $(\mathbb{R}^n, \|\,.\,\|_p)$ dengan p dapat bernilai 1 atau ∞, dan $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang Euclid. Hal ini dilakukan mengingat penggunaan dualitas sebagai alat menyelesaikan masalah program *conic* inversnya. Diketahui $\|\,.\,\|_p$ pada $\mathbb{R}^n$ saling ekuivalen, namun dual dari norma $\|\,.\,\|_p$ dengan $p = \infty$ belum diketahui. Namun sebelumnya perlu ditentukan rumusan masalah SOCP dan SDP pada ruang bernorma tersebut, menentukan generalisasi teorema-teorema pada program linear invers, dan menentukan metode penyelesaian yang sesuai dan tepat, serta menentukan aplikasinya.

SOC dalam Ben Tal and Nemirovski (2001) didefinisikan sebagai

$$L^m = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, x_m \geq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{m-1}^2}\right\}, m \geq 2,$$

dan SOCP adalah masalah *conic*:

meminimumkan $\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} | \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} \geq_K \boldsymbol{0}\}$,

dengan *cone* K merupakan hasil kali langsung (*direct product*) dari beberapa *cone* order dua:

$$K = L^{m_1} \times L^{m_2} \times \dots \times L^{m_k}$$

dan $\geq_K$ menyatakan urutan *conic*, yaitu $\boldsymbol{a} \geq_K \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \geq_K \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in K$.

Pada masalah program *cone* order dua, suatu fungsi linear diminimumkan atas irisan himpunan *affine* dan hasil kali langsung beberapa SOC. SOCP merupakan masalah konveks nonlinear dengan program linear dan program kuadratik (konveks) sebagai kasus khusus (Andersen et. Al., 2002, Cao et.al., 2010, Lobo et. Al., 1998). Dalam beberapa tahun terakhir, masalah SOCP mendapat perhatian para peneliti karena jangkauan aplikasinya yang luas (Alizadeh and Goldfarb, 2003, Andersen et. Al., 2002). Masalah optimisasi *cone* order dua secara teori dapat diselesaikan secara efisien menggunakan metode titik interior.

Dalam perkembangan penelitian di bidang optimisasi terdapat pergeseran-pergeseran struktur. Kwak (2008) mengajukan metode *principal component analysis* (PCA) berdasarkan teknik optimisasi yang dikerjakan dengan norma L_1. Metode tersebut merupakan pengembangan dari PCA konvensional berdasarkan norma L_2. Metode PCA yang dikerjakan Kahl lebih sederhana dan mudah diimplementasikan. Perkembangan penelitian optimisasi akhir-akhir ini mempunyai kecenderungan menggantikan norma L_2 dengan norma L_1 (Schmidt, 2005).

Sementara itu Kahl and Hartley (2008) menyajikan kerangka kerja baru untuk menyelesaikan struktur geometri dan masalah gerakan berdasar pada norma L_∞ daripada menggunakan fungsi *cost* norma L_2. Kerangka kerja ini menghasilkan komputasi estimasi global yang efisien, dalam arti solusinya invarian terhadap transformasi proyektif pada sistem koordinat dunia dan similaritas transformasi dalam bidang *image*, karena metrik jarak image dari *error reproyektif* juga invarian terhadap transformasi yang dimaksud. Dengan kata lain tidak memerlukan normalisasi koordinat image. Selain itu berbagai masalah struktur dan gerakan, seperti triangulasi, *resection* kamera dan estimasi homografi dapat dinyatakan ulang sebagai masalah optimisasi quasi konveks yang dapat diselesaikan menggunakan program *cone* order dua (SOCP).

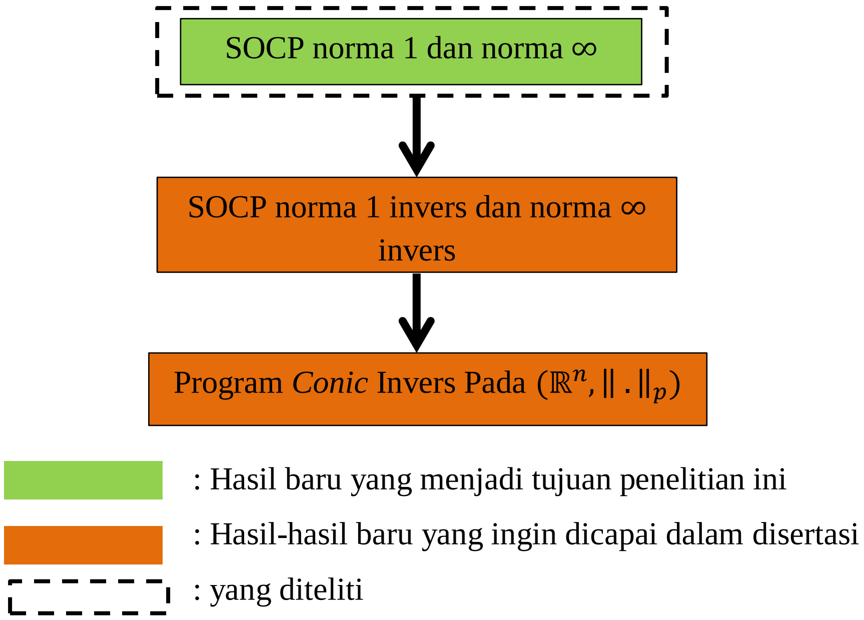
Becker et.al. (2011) membangun suatu kerangka kerja untuk menyelesaikan berbagai masalah *cone* konveks dengan pendekatan sebagai berikut: pertama, menentukan formulasi *conic* dari masalah; kedua, menentukan dualnya; ketiga, aplikasi *smoothing*; keempat, menyelesaikan menggunakan suatu metode optimal order satu. Kegunaan pendekatan ini adalah fleksibilitasnya. Suatu estimator yang dipandang efektif secara teori dan praktek adalah *selector* Dantzig (Candes and Tao, 2005), yang ide prosedur sederhananya: mendapatkan estimasi yang konsisten dari data observasi dan mempunyai norma l_1 yang minimum. *Selector* Dantzig adalah solusi program konveks

$$\text{meminimumkan } \|\boldsymbol{x}\|_1, \text{ dengan kendala } \|\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Ax})\|_\infty \le \delta,$$

dengan δ skalar dan diasumsikan kolom matriks A dinormalisasikan.

Berdasarkan referensi yang diuraikan tersebut dan terutama berdasarkan paper Lobo, et. al. (1998) yang menguraikan masalah program SOC maka pada paper ini akan dibahas masalah SOCP dengan mengubah fungsi kendala menjadi fungsi norma 1 dengan domain $\mathbb{R}_{+}^{n}$.

2.2 Roadmap Penelitian



BAB 3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis (ranah optmisasi-analisis) yang didasarkan pada studi literatur yang meliputi kajian-kajian secara teoritis, dengan harapan mendapatkan teori baru yang bersifat universal. Adapun algoritma yang dimaksudkan dalam penelitian ini adalah langkah-langkah yang dipakai dalam mencapai hasil (dalam hal ini solusi optimal masalah). Namun tidak menutup kemungkinan algoritma tersebut dijadikan dasar untuk mendapatkan suatu program komputer. Namun dalam penelitian ini peneliti membatasi pada penelitian teoritisnya saja. Untuk mencapai tujuan penelitian ini, langkah awal yang dapat dilakukan adalah mempelajari dan mengkaji secara mendalam dan menyeluruh terhadap buku dan karya ilmiah yang dijadikan dasar dan yang membangkitkan masalah pada penelitian ini. Selain itu, dikaji juga karya-karya ilmiah pendukung yang dapat memberikan jembatan untuk menyelesaikan masalah dalam penelitian ini. Pada tahap ini diperlukan ketelitian untuk mengamati fenomena-fenomena yang muncul untuk dibuat kaitan dengan masalah-masalah yang akan diselesaikan. Dilihat pula berbagai hasil yang telah dilakukan peneliti lain ataupun teori terkait yang digunakan peneliti lain dalam aplikasi, yang kesemuanya akan digunakan sebagai dasar penelitian ini. Selanjutnya dilakukan penelitian terhadap sifat-sifat yang disajikan dalam proposisi, lemma, teorema dan akibat yang berlaku dalam sruktur dan penerapan yang baru ini.

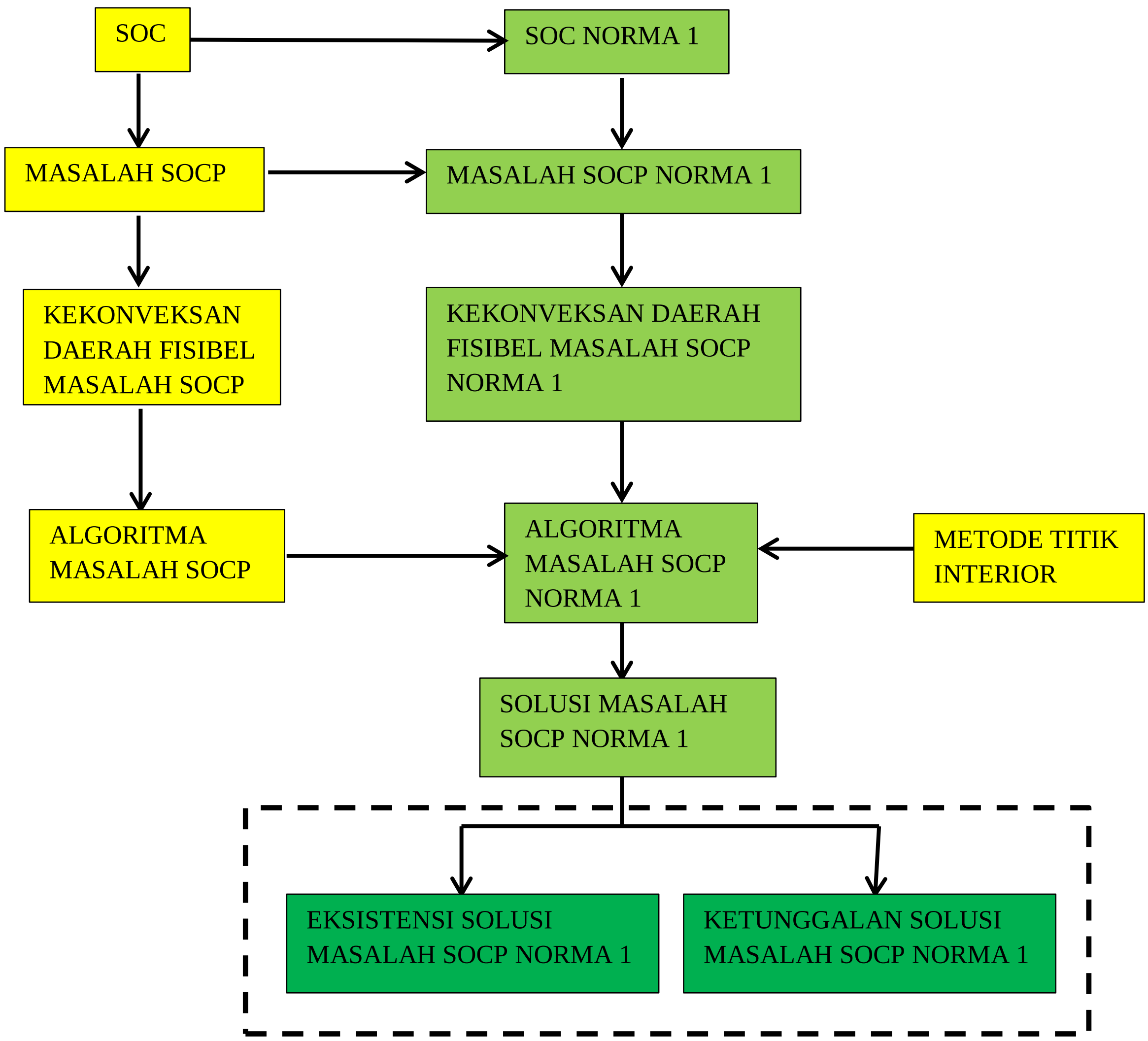
Tahap-tahap yang akan dilakukan dalam pelaksanaan penelitian ini diberikan pada diagram alur berikut.

3.1 Tahapan Penelitian

Penelitian diawali dengan mempelajari SOC yang merupakan bentuk dasar daerah permasalahan (dipandang secara geometri), SOC norma 1, pemodelan matematika masalah SOCP, pemodelan matematika masalah SOCP norma 1, kekonveksan daerah fisibel masalah SOCP, kekonveksan daerah fisibel masalah SOCP norma 1, selanjutnya mempelajari metode titik interior, menerapkan metode titik interior pada masalah SOCP norma 1, menentukan solusi masalah SOCP norma 1.

Setelah solusi masalah diperoleh yang menjadi pertanyaan selanjutnya adalah tentang eksistensi solusi dan ketunggalan solusi masalah. Namun karena untuk menunjukkan kedua hal tersebut membutuhkan banyak teori sebagai alat bantu, yang tidak mudah untuk dipelajari, maka masalah eksistensi dan ketunggalan solusi tidak menjadi tujuan utama dalam penelitian ini, namun jika selama masa penelitian, berhasil diperoleh, maka akan dijadikan hasil tambahan.

3.2 Bagan Penelitian



Keterangan bagan:

: hasil penelitian peneliti terdahulu / teori yang telah ada

: hasil baru yang menjadi tujuan penelitian

: hasil baru yang merupakan hasil tambahan

: bukan tujuan utama penelitian

BAB 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Second Order Cone (*cone* order dua/SOC) dalam Ben Tal and Nemirovski (2001) didefinisikan sebagai

$$L^m = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \middle| x_m \geq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{m-1}^2} \right\}, m \geq 2,$$

dan *second-order cone programming* (program *cone* order dua/SOCP) adalah masalah *conic*:

meminimumkan $\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \geq_C \mathbf{0}\}$,

dengan *cone* C merupakan hasil kali langsung (*direct product*) dari beberapa *cone* order dua:

$$C = L^{m_1} \times L^{m_2} \times \dots \times L^{m_k}$$

dan $\geq_C$ menyatakan urutan *conic*, yaitu $\boldsymbol{a} \geq_C \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \geq_C \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in C$.

Pada masalah SOCP, suatu fungsi linear diminimumkan atas irisan himpunan *affine* dan hasil kali langsung beberapa SOC. SOCP merupakan masalah konveks nonlinear dengan program linear dan program kuadratik (konveks) sebagai kasus khusus (Andersen et.al., 2002, Cao et.al., 2010, Lobo et.al., 1998). Dalam beberapa tahun terakhir, masalah SOCP mendapat perhatian para peneliti karena jangkauan aplikasinya yang luas (Alizadeh and Goldfarb, 2003, Andersen et.al., 2002). Masalah optimisasi SOC secara teori dapat diselesaikan secara efisien menggunakan metode titik interior.

Dalam perkembangan penelitian di bidang optimisasi terdapat pergeseran-pergeseran struktur. Kwak (2008) mengajukan metode *principal component analysis* (PCA) berdasarkan teknik optimisasi yang dikerjakan dengan norma L_1. Metode tersebut merupakan pengembangan dari PCA konvensional berdasarkan norma L_2. Metode PCA yang dikerjakan Kahl lebih sederhana dan mudah diimplementasikan. Perkembangan penelitian optimisasi akhir-akhir ini mempunyai kecenderungan menggantikan norma L_2 dengan norma L_1 (Schmidt, 2005).

Sementara itu Kahl and Hartley (2008) menyajikan kerangka kerja baru untuk menyelesaikan struktur geometri dan masalah gerakan berdasar pada norma L_∞ daripada menggunakan fungsi *cost* norma L_2. Kerangka kerja ini menghasilkan komputasi estimasi global yang efisien, dalam arti solusinya invarian terhadap transformasi proyektif pada sistem koordinat dunia dan similaritas transformasi dalam bidang *image*, karena metrik jarak *image* dari *error reproyektif* juga invarian terhadap transformasi yang dimaksud. Dengan kata lain tidak memerlukan normalisasi koordinat *image*. Selain itu berbagai masalah struktur dan gerakan, seperti triangulasi, *resection* kamera dan estimasi homografi dapat dinyatakan ulang sebagai masalah optimisasi quasi konveks yang dapat diselesaikan menggunakan SOCP.

Becker et.al. (2011) membangun suatu kerangka kerja untuk menyelesaikan berbagai masalah *cone* konveks dengan pendekatan sebagai berikut: <u>pertama</u>, menentukan formulasi *conic* dari masalah; <u>kedua</u>, menentukan dualnya; <u>ketiga</u>, aplikasi *smoothing*; <u>keempat</u>, menyelesaikan menggunakan suatu metode optimal order satu. Kegunaan pendekatan ini adalah fleksibilitasnya. Suatu estimator yang dipandang efektif secara teori dan praktek adalah *selector* Dantzig (Candes and Tao, 2005), yang ide prosedur sederhananya: mendapatkan estimasi yang konsisten dari data observasi dan mempunyai norma l_1 yang minimum. *Selector* Dantzig adalah solusi program konveks

$$\text{meminimumkan } \|\boldsymbol{x}\|_1, \text{ dengan kendala } \|\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\|_\infty \le \delta,$$

dengan δ skalar dan diasumsikan kolom matriks A dinormalisasikan.

Berdasarkan referensi yang diuraikan tersebut dan terutama berdasarkan paper Lobo, et.al. (1998) yang menguraikan masalah SOCP maka pada penelitian ini dibahas masalah SOCP dengan mengubah fungsi kendala menjadi fungsi norma 1 dengan domain $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}_{+}$, di samping juga menguraikan SOCP norma ∞ sebagai dual masalah SOCP norma 1. Diasumsikan dual norma 1 adalah norma ∞.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. *Second Order Cone* (SOC)

Sebelum membicarakan *second order conic programming* (SOCP), akan dibicarakan terlebih dahulu mengenai SOC sebagai berikut. Dalam bahasan ini SOC didefinisikan pada norma 2 (norma Euclids).

Ben Tal dan Nemirovski mengatakan suatu *cone* $C = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m | \boldsymbol{a} \succeq \boldsymbol{0}\}$, dengan $\boldsymbol{a} \succeq \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \succeq \boldsymbol{0}$ dan $\succeq$ suatu urutan parsial, adalah suatu *pointed convex cone* yang memenuhi syarat-syarat berikut:

1. C tak kosong dan tertutup terhadap penjumlahan, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in C \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' \in C$
2. C himpunan *conic*, $\boldsymbol{a} \in C, \lambda \ge 0 \Rightarrow \lambda\boldsymbol{a} \in C$
3. C *pointed*, $\boldsymbol{a} \in C$ dan $-\boldsymbol{a} \in C \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Dengan urutan parsial pada himpunan C di $\mathbb{R}^m$ terdapat tiga macam *cone* berikut:

1. Ortan nonnegatif, $\mathbb{R}_+^m = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m)^T | x_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$
2. *Second Order Cone* (SOC)

$$C_m = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)^T \in \mathbb{R}^m \middle| x_m \geq \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{m-1} x_i^2} \right\}.$$

3. *Cone* semidefinit positif, S_+^m, *cone* dalam ruang S^m yaitu ruang matriks berukuran $m \times m$ dan memuat semua matriks semidefinit positif $\boldsymbol{A}$ berukuran $m \times m$.

2. *Second Order Cone Programming*

Diberikan definisi program *conic* berikut dari Ben Tal dan Nemirovski. Misalkan C suatu *cone* di $\mathbb{R}^m$ (*convex*, *pointed*, *closed*, dan dengan interior tak kosong). Diberikan $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n$, matriks kendala $\boldsymbol{A}$ berukuran $m \times n$, dan vektor ruas kanan $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, masalah optimisasi berikut disebut dengan program *conic*,

$$\text{meminimumkan } \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}, \text{ dengan kendala } \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} \geq_C \boldsymbol{0}$$

dengan $\geq_C$ urutan parsial pada himpunan *cone* C. Jika C adalah *direct product* beberapa SOC, maka masalah program *conic* di atas disebut dengan masalah *second order cone programming* (SOCP). Secara umum SOCP dimodelkan sebagai berikut (Lobo et al),

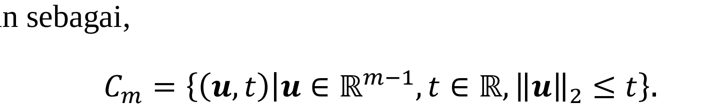
meminimumkan $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}$,

dengan kendala $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_2 \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i$ $(i = 1, \dots, N)$ (4)

dengan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ variabel keputusan, dan parameter $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1)\times n}, \boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$ dan $d_i \in \mathbb{R}$. Kendala $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\| \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_i$ disebut kendala SOC berdimensi n_i. Berdasarkan definisi, SOC standar berdimensi m didefinisikan sebagai,

$$C_m = \{(\boldsymbol{u}, t) | \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m-1}, t \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_2 \leq t\}.$$

Untuk $m = 1$, $C_1 = \{t | t \in \mathbb{R}, 0 \leq t\}$, dan secara geometris dapat digambarkan seperti Gambar 1 berikut.

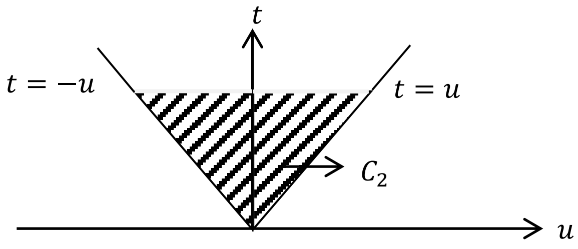


Gambar 1. SOC C_1

Untuk $m = 2$,

$$\begin{aligned} C_2 &= \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \|u\|_2 \leq t\} \\ &= \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, |u| \leq t\} = \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, -t \leq u \leq t\}, \end{aligned}$$

dan secara geometris digambarkan seperti Gambar 2 berikut.

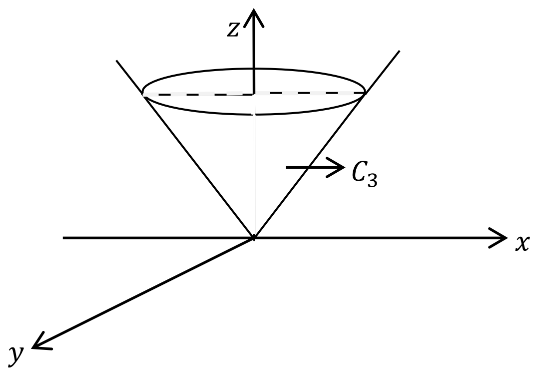


Gambar 2. SOC C_2

Untuk $m = 3$, $\quad C_3 = \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \|(x, y)\|_2 \leq t\}$

$$= \left\{(x, y, t) \middle| (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq t\right\}, \text{ dan}$$

secara geometris digambarkan seperti Gambar 3 berikut.



Gambar 3. SOC C_3

Lemma 1. *Himpunan titik-titik yang memenuhi kendala cone order dua adalah image invers dari cone order dua satuan terhadap pemetaan affine*:

$$\|\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_2 \leq \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_i \\ \boldsymbol{c}_i^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_3$$

dan konveks, i=1,2,...,N.

Bukti: Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan $N = 1, n_i = 2 = n$, $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}$, $d_i = d \in \mathbb{R}$, maka parameter masalah SOCP berdimensi 2 adalah

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2)^T.$$

Kendala masalah SOCP berdimensi 2: $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\|_2 \leq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + d$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \right\|_2 \leq [h_1 \quad h_2]^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + d$$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \end{bmatrix} \right\|_2 \leq h_1x_1 + h_2x_2 + d$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2)^2} \leq h_1x_1 + h_2x_2 + d$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \\ h_1x_1 + h_2x_2 + d \end{bmatrix} \in C_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ d \end{bmatrix} \in C_3. \ \blacksquare$$

3. SOC pada SOCP dengan Norma 1

Diberikan masalah SOCP (4). Apabila norma pada fungsi kendala masalah SOCP (4) diubah menjadi fungsi kendala bernorma 1, maka diperoleh masalah SOCP:

meminimumkan $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}$,

dengan kendala $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_1 \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i \ (i = 1, \dots, N)$ (5)

dengan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel keputusan, dan parameter $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1)\times n}, \boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$ dan $d_i \in \mathbb{R}$. Sebelum membahas masalah SOCP (5), perlu didefinisikan pengertian SOC norma 1 sebagai berikut:

$$C_m^* = \{(\boldsymbol{u}, t) | \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m-1}, t \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_1 \leq t\}.$$

Namun dengan pengubahan tersebut terdapat perbedaan antara SOC standar (norma 2) dengan SOC norma 1 sebagai berikut:

Untuk $m = 1$, $C_1^* = \{t | t \in \mathbb{R}, \|0\|_1 \leq t\} = \{t | t \in \mathbb{R}, 0 \leq t\} = C_1$.

Untuk $m = 2$, $C_2^* = \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \|u\|_1 \leq t\}$

$= \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, |u| \leq t\} = C_2$.

Untuk $m = 3$, $C_3^* = \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \|(x, y)\|_1 \leq t\}$

$= \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq t\} \neq C_3$.

Contoh 1. Merupakan suatu *counter example*.

Ambil $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}, t = 1, x, y, t \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan $C_3^* \neq C_3$.

Untuk $(x, y, t) \in C_3$, berlaku

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq t \Leftrightarrow \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{9}{16}\right)} = \sqrt{\tfrac{13}{16}} < 1. \quad (6)$$

Sementara itu untuk $(x, y, t) \in C_3^*$ berlaku $\left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{5}{4} > 1.$ (7)

Dari (3) dan (4) terbukti $C_3^* \neq C_3$. ■

Lemma 2. *Jika C_1, C_2, C_3 adalah SOC norma $\|.\|_2$ dan C_1^*, C_2^*, C_3^* adalah SOC norma $\|.\|_1$, maka berlaku $C_1^* = C_1, C_2^* = C_2$, tetapi $C_3^* \neq C_3$.*

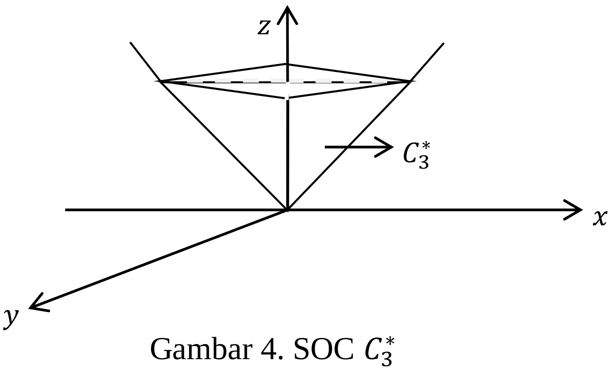
Bukti: Jelas $C_1^* = C_1$ dan $C_2^* = C_2$, sedangkan untuk C_3^* menurut definisinya

$$C_3^* = \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \|(x, y)\|_1 \leq t\}$$

$$= \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq t\} \neq C_3.$$

Terbukti $C_1^* = C_1, C_2^* = C_2$, tetapi $C_3^* \neq C_3$. ■

Secara geometris perbedaan antara C_3^* dan C_3 terlihat seperti Gambat 4 berikut:



Gambar 4. SOC C_3^*

Lemma 3. *Diberikan $x, y, t \in \mathbb{R}$ berlaku $\sqrt{x^2 + y^2} \leq t \not\Leftrightarrow |x| + |y| \leq t$.*

Bukti: (dengan *counter example*) pada Contoh 1.

Berikut ini akan ditunjukkan hubungan kendala SOCP standar dengan kendala SOCP norma 1 dan hubungannya dengan pemetaan *affine*.

Lemma 4. *Untuk kendala SOCP* (4) *dan kendala SOCP* (5) *terhadap pemetaan affine berlaku hubungan sebagai berikut:*

(i) $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i\|_1 \le \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}+d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_i\\ \boldsymbol{c}_i^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_i\\ d_i\end{bmatrix}\in C_3^*$

(ii) $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i\|_2 \le \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}+d_i \not\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_i\\ \boldsymbol{c}_i^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_i\\ d_i\end{bmatrix}\in C_3^*$.

Bukti: Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan $N=1, n_i=2=n, \boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{b}, d_i=d\in\mathbb{R}$, maka parameter masalah SOCP berdimensi 2 adalah

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^T=(x_1,x_2)^T.$$

(i) Diperoleh

$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\|_1 \le \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+d$

$\Leftrightarrow |a_{11}x_1+a_{12}x_2+g_1|+|a_{21}x_1+a_{22}x_2+g_2| \le h_1x_1+h_2x_2+d$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+g_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+g_2\\ h_1x_1+h_2x_2+d\end{bmatrix}\in C_3^*$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{c}^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}\\ d\end{bmatrix}\in C_3^*$.

(ii) Didapatkan

$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\|_2 \le \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+d$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a_{11}x_1+a_{12}x_2+g_1)^2+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+g_2)^2} \le h_1x_1+h_2x_2+d$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+g_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+g_2\\ h_1x_1+h_2x_2+d\end{bmatrix}\in C_3$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{c}^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}\\ d\end{bmatrix}\in C_3$.

Sementara telah diketahui $C_3\ne C_3^*$, sehingga kendala SOCP (4) tidak ekuivalen dengan pemetaan *affine* di C_3^*. ■

Seperti pada masalah SOCP norma 1, berikut akan diuraikan masalah SOC dan sifat-sifat kendala SOCP dengan norma ∞.

4. SOC pada SOCP dengan Norma ∞

Diberikan masalah SOCP norma 2 (4). Apabila norma pada fungsi kendala masalah SOCP norma 2 diubah menjadi fungsi kendala bernorma ∞, maka diperoleh masalah SOCP:

$$\text{meminimumkan } \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x},$$

$$\text{dengan kendala } \|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i\|_\infty \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}+d_i \; (i=1,\dots,N) \tag{8}$$

dengan $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ adalah variabel keputusan, dan parameter $\boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i\in\mathbb{R}^{(n_i-1)\times n}, \boldsymbol{b}_i\in\mathbb{R}^{n_i-1}, \boldsymbol{c}_i\in\mathbb{R}^n$ dan $d_i\in\mathbb{R}$. Sebelum membahas masalah SOCP (8), perlu didefinisikan pengertian SOC norma ∞ sebagai berikut:

$$C_m^\# = \{(\boldsymbol{u},t)|\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^{m-1}, t\in\mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_\infty\leq t\}.$$

Namun dengan pengubahan tersebut terdapat perbedaan antara SOC standar (norma 2) dengan SOC norma ∞ sebagai berikut (C_i SOC norma 2 untuk $i=1,2,3$):

Untuk $m=1$, $C_1^\#=\{t|t\in\mathbb{R}, \|0\|_\infty\leq t\}=\{t|t\in\mathbb{R}, 0\leq t\}=C_1.$

Untuk $m=2$, $C_2^\#=\{(u,t)|u\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}, \|u\|_\infty\leq t\}$

$$=\{(u,t)|u\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}, |u|\leq t\}=C_2.$$

Untuk $m=3$, $C_3^\#=\{(x,y,t)|(x,y)\in\mathbb{R}^2, t\in\mathbb{R}, \|(x,y)\|_\infty\leq t\}$

$$=\{(x,y,t)|(x,y)\in\mathbb{R}^2, t\in\mathbb{R}, \sup\{|x|,|y|\}\leq t\}=C_3.$$

Contoh 2.

Ambil $x=\frac{1}{2}, y=\frac{3}{4}, t=1, x,y,t\in\mathbb{R}$. Akan ditunjukkan $C_3^\#=C_3$.

Untuk $(x,y,t)\in C_3$, berlaku

$$\sqrt{x^2+y^2}\leq t \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{9}{16}\right)}=\sqrt{\frac{13}{16}}<1. \tag{9}$$

Sementara itu untuk $(x,y,t)\in C_3^\#$ berlaku

$$\sup\left\{\left|\frac{1}{2}\right|,\left|\frac{3}{4}\right|\right\}=\frac{3}{4}<1. \tag{10}$$

Dari (9) dan (10) terbukti $C_3^\#=C_3$. ■

Lemma 5. *Jika* C_1, C_2, C_3 *adalah SOC norma* $\|.\|_2$ *dan* $C_1^\#, C_2^\#, C_3^\#$ *adalah SOC norma* $\|.\|_\infty$*, maka berlaku* $C_1^\# = C_1, C_2^\# = C_2$*, tetapi* $C_3^\# = C_3$.

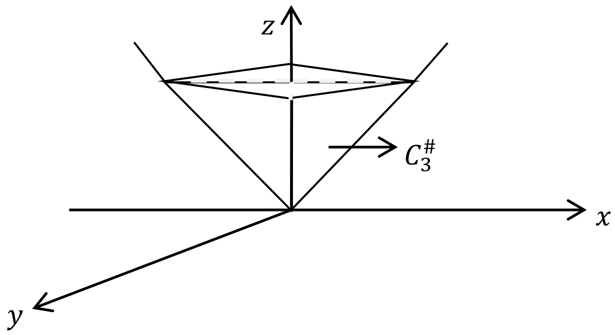
Bukti: Jelas $C_1^\# = C_1$ dan $C_2^\# = C_2$, sedangkan untuk $C_3^\#$ menurut definisinya

$$C_3^\# = \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \|(x, y)\|_\infty \leq t\}$$

$$= \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \sup\{|x|, |y|\} \leq t\} = C_3.$$

Terbukti $C_1^\# = C_1, C_2^\# = C_2$, tetapi $C_3^\# = C_3$. ■

Secara geometris perbedaan antara $C_3^\#$ dan C_3 terlihat seperti Gambat 5 berikut:



Gambar 5. SOC $C_3^\#$

Lemma 6. *Diberikan* $x, y, t \in \mathbb{R}$ *berlaku* $\sqrt{x^2 + y^2} \leq t \Leftrightarrow \sup\{|x|, |y|\} \leq t$.

Berikut ini akan ditunjukkan hubungan kendala SOCP standar dengan kendala SOCP norma ∞ dan hubungannya dengan pemetaan *affine*.

Lemma 7. *Untuk kendala SOCP norma* 2 *dan kendala SOCP* (5) *terhadap pemetaan affine berlaku hubungan sebagai berikut:*

(iii) $\|\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_\infty \leq \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x} + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_i \\ \boldsymbol{c}_i^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_3^\#$

(iv) $\|\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_2 \leq \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x} + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_i \\ \boldsymbol{c}_i^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_3^\#$.

Bukti: Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan $N = 1, n_i = 2 = n, \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}, d_i = d \in \mathbb{R}$, maka parameter masalah SOCP berdimensi 2 adalah

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2)^T.$$

(ii) Diperoleh

$$\|\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{b}\|_\infty \leq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+d$$

$$\Leftrightarrow \sup\{|a_{11}x_1+a_{12}x_2+g_1|, |a_{21}x_1+a_{22}x_2+g_2|\} \leq h_1x_1+h_2x_2+d$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+g_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+g_2 \\ h_1x_1+h_2x_2+d \end{bmatrix} \in C_3^\#$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c}^T \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ d \end{bmatrix} \in C_3^\#.$$

(iii) Didapatkan

$$\|\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{b}\|_2 \leq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+d$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a_{11}x_1+a_{12}x_2+g_1)^2+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+g_2)^2} \leq h_1x_1+h_2x_2+d$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+g_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+g_2 \\ h_1x_1+h_2x_2+d \end{bmatrix} \in C_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c}^T \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ d \end{bmatrix} \in C_3.$$

Sementara telah diketahui $C_3 = C_3^\#$, sehingga kendala SOCP norma 2 tidak ekuivalen dengan pemetaan *affine* di $C_3^\#$. ■

5. Kekonveksan pada SOCP Norma 1

Masalah *second order cone programming* (SOCP) merupakan masalah optimisasi konveks yang bertujuan untuk mengoptimalkan fungsi tujuan linear terhadap kendala yang merupakan irisan beberapa *second order cone* (SOC) dengan bidang *affine*. Daerah hasil irisan ini disebut daerah fisibel. Sebagai suatu masalah optimisasi konveks, maka disyaratkan salah satu baik fungsi tujuan atau fungsi kendala merupakan fungsi konveks. Disamping itu sebagai suatu masalah optimisasi eksistensi solusi optimal diperoleh jika titik peminimum berada di antara salah satu titik dalam daerah fisibel yang konveks. Sehingga menjadi suatu hal yang mendasar untuk menentukan kekonveksan pada masalah SOCP. Kekonveksan sendiri telah mengalami perkembangan penting dalam mempelajari masalah optimisasi di berbagai area aplikasi matematika.

Pentingnya masalah kekonveksan merupakan satu hal yang penting dalam mempelajari masalah optimisasi, dalam hal ini dalam masalah SOCP norma satu dan pada masalah SOCP norma infinit ($\|.\|_\infty$).

Literatur yang digunakan untuk masalah ini diantaranya Rockafellar (1970), Dattorro (2005), dan Boyd and Vandenberghe (2004) membahas himpunan *cone* konveks.

Sebelum membahas masalah kekonveksan, terlebih dahulu akan disampaikan definisi norma dan norma $\|.\|_1$ sebagai contohnya.

Definisi 1. (Norma) *Norma dari ruang vektor real atau kompleks* V *adalah fungsi* $\|.\|$ *yang memetakan* V *ke* $\mathbb{R}$ *yang memenuhi syarat-syarat berikut:*

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ *dan* $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
2. $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$ *untuk setiap skalar* α
3. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Berikut ini adalah contoh norma 1 yang didefinisikan pada ruang vektor $\mathbb{R}^m$.

Contoh 3: Diberikan ruang vektor real $\mathbb{R}^m$ dan fungsi $\|.\|_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dengan $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \|(x_1, \dots, x_m)\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_m|$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Fungsi $\|.\|_1$ memenuhi aksioma-aksioma norma, yaitu:

1. $\|\boldsymbol{x}\|_1 \geq 0$.

   Untuk $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ berlaku
   $$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\|_1 &= \|(x_1, \dots, x_m)\|_1 \\ &= |x_1| + \cdots + |x_m| \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

   $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$

   Untuk $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ berlaku
   $$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\|_1 &= \|(x_1, \dots, x_m)\|_1 \\ &= |x_1| + \cdots + |x_m| \\ &= 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, \dots, x_m = 0,\end{aligned}$$

   yaitu $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$

2. $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_1 = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_1$ untuk setiap skalar α.

   Untuk $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ dan untuk sebarang skalar α berlaku

   $$\begin{aligned}\|\alpha\boldsymbol{x}\|_1 &= \|\alpha(x_1, \dots, x_m)\|_1 \\ &= \|(\alpha x_1, \dots, \alpha x_m)\|_1 \\ &= |\alpha x_1| + \cdots + |\alpha x_m| \\ &= |\alpha||x_1| + \cdots + |\alpha||x_m| \\ &= |\alpha|(|x_1| + \cdots + |x_m|) \\ &= |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_1.\end{aligned}$$

3. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_1 = \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1$.
Untuk $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m), \boldsymbol{y} = (\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_m) \in \mathbb{R}^m$ berlaku

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_1 &= \|(x_1+y_1, \dots, x_m+y_m)\|_1 \\
&= |x_1+y_1| + \cdots + |x_m+y_m| \\
&\le |x_1| + |y_1| + \cdots + |x_m| + |y_m| \\
&= (|x_1| + \cdots + |x_m|) + (|\mathrm{y}_1| + \cdots + |\mathrm{y}_m|) \\
&= \|(x_1, \dots, x_m)\|_1 + \|(\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_m)\|_1 \\
&= \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1.
\end{aligned}$$

Selanjutnya disampaikan definisi-definisi mengenai kekonveksan yang selanjutnya akan digunakan dalam pembahasan paper ini.

Definisi 2. (Himpunan Konveks) *Himpunan C subset $\mathbb{R}^n$ konveks jika untuk sebarang $x_1, x_2 \in C$ dan sebarang λ dengan $0 \le \lambda \le 1$, diperoleh $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$.*

Definisi 3. (*Cone*) *Himpunan C disebut cone jika untuk setiap $x \in C$ dan $\lambda \ge 0$ maka $\lambda x \in C$.*

Definisi 4. (*Cone* Konveks) *Himpunan C cone konveks jika C konveks dan merupakan cone.*

Definisi 5. (Kombinasi *Conic*) *Suatu titik berbentuk $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$ dengan $\lambda_1, \dots, \lambda_k \ge 0$ disebut kombinasi conic $x_1, \dots, x_k$.*

Jika x_i di *cone* konveks C, maka setiap kombinasi *conic* x_i di C.

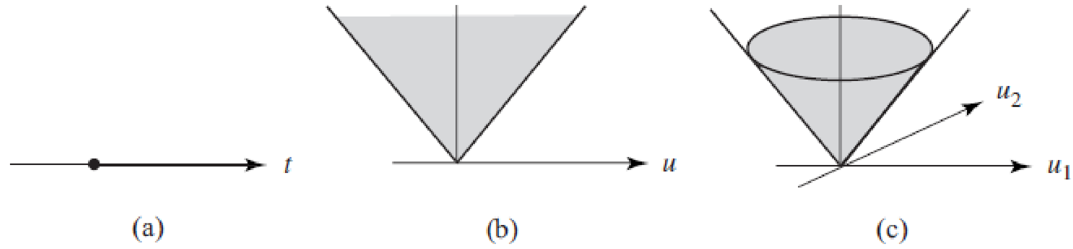
Selanjutnya akan dibicarakan terlebih dahulu mengenai daerah fisibel.
Definisi 6. (Solusi Fisibel) *Solusi fisibel di dalam masalah optimisasi adalah solusi yang memenuhi semua kendala*.

Definisi 7. (Daerah Fisibel) *Daerah fisibel di dalam masalah optimisasi adalah himpunan semua solusi fisibel yang mungkin*.

Daerah fisibel ini merupakan irisan semua kendala yang ada pada masalah optimisasinya.

Lemma 8. SOC norma 2 *C merupakan himpunan konveks di $\mathbb{R}^n$*.

Berikut adalah sketsa SOC norma 2 dalam beberapa dimensi,



Gambar 6. *Cone* order dua berdimensi (a) $n = 1$, (b) $n = 2$, dan (c) $n = 3$.

Selanjutnya akan diuraikan suatu lemma kekonveksan SOC norma $\|.\|_1$ berikut.

Lemma 9. *Diberikan suatu cone order dua norma* $\|.\|_1$
$C_n^* = \{(\boldsymbol{u}, t) | \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_1 \leq t\}$, *akan ditunjukkan* C_m^* *konveks untuk setiap* n.

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1, t_1), \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u}_2, t_2) \in C_m^*$ dengan $\|\boldsymbol{u}_1\|_1 \leq t_1$ dan $\|\boldsymbol{u}_2\|_1 \leq t_2$ dan suatu skalar $\lambda \in [0,1]$, diperoleh

$$\lambda \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ t_1 \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \boldsymbol{u}_1 + (1 - \lambda) \boldsymbol{u}_2 \\ \lambda t_1 + (1 - \lambda) t_2 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\|\lambda \boldsymbol{u}_1 + (1 - \lambda) \boldsymbol{u}_2\|_1 \leq \lambda \|\boldsymbol{u}_1\|_1 + (1 - \lambda) \|\boldsymbol{u}_2\|_1 \leq \lambda t_1 + (1 - \lambda) t_2.$$

Terbukti C_n^* adalah himpunan konveks.

Lemma 10. (Kekonveksan Irisan SOC Norma $\|.\|_1$). *Jika* $C_n^{*i}, i = 1, \dots, k$ *adalah SOC norma* $\|.\|_1$ *yang konveks untuk setiap* i, *maka* $C^* = C_n^{*1} \cap C_n^{*2} \cap \dots \cap C_n^{*k}$ *himpunan konveks.*

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C^*$ dan $\lambda \in [0,1]$. Akan ditunjukkan $\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda) \boldsymbol{y} \in C^*$. Karena $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C_n^{*1} \cap C_n^{*2} \cap \dots \cap C_n^{*k}$, maka $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C_n^{*1}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C_n^{*2}$, ..., dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C_n^{*k}$. Karena $C_n^{*1}, C_n^{*2}, \dots, C_n^{*k}$ konveks, maka $\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda) \boldsymbol{y} \in C_n^{*1}$, $\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda) \boldsymbol{y} \in C_n^{*2}$, ..., dan $\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda) \boldsymbol{y} \in C_n^{*k}$. Sehingga $\lambda \boldsymbol{x} + (1 - \lambda) \boldsymbol{y} \in C^*$.

Lemma 11. (Kekonveksan pada SOCP norma $\|.\|_1$). *Untuk kendala SOCP terhadap pemetaan affine berlaku hubungan sebagai berikut:*

$$\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i\|_1 \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}+d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_i\\ \boldsymbol{c}_i^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_i\\ d_i\end{bmatrix} \in C_n^*,$$

maka irisan kendala pada SOCP norma $\|.\|_1$ adalah himpunan konveks.

Bukti: Dari Lemma 4 telah ditunjukkan bahwa SOC dalam (7) dan SOC dalam (8) ekuivalen. Selanjutnya, dari Lemma 9 SOC *cone* konveks *pointed closed* tak kosong dan menggunakan Lemma 10 irisan beberapa SOC pada (8) merupakan himpunan konveks. ▪

6. Kekonveksan pada SOCP Norma ∞

Berikut ini adalah contoh norma ∞ yang didefinisikan pada ruang vektor $\mathbb{R}^m$.

Contoh 4: Diberikan ruang vektor real $\mathbb{R}^n$ dan fungsi $\|.\|_\infty\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty = \sup\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Fungsi $\|.\|_\infty$ memenuhi aksioma-aksioma norma, yaitu:

1. $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \geq 0$.
   Untuk $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ berlaku $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty$
   $= \sup\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$
   ≥ 0.

   $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$
   Untuk $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^m$ berlaku $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty$
   $= \sup\{|x_1|,\dots,|x_n|\}$
   $= 0 \Leftrightarrow x_1=0,\dots,x_n=0,$
   yaitu $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$

2. $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_\infty = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ untuk setiap skalar α.
   Untuk $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ dan untuk sebarang skalar α berlaku

   $$\begin{aligned}\|\alpha\boldsymbol{x}\|_\infty &= \|\alpha(x_1,\dots,x_n)\|_\infty\\ &= \|(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)\|_\infty\\ &= \sup\{|\alpha x_1|,\dots,|\alpha x_n|\}\\ &= \sup\{|\alpha|(|x_1|,\dots,|x_n|)\}\\ &= |\alpha|\sup\{|x_1|,\dots,|x_n|\}\\ &= |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_\infty.\end{aligned}$$

3. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_\infty = \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty$.

Untuk $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_n) \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_\infty &= \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_\infty \\
&= \sup\{|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|\} \\
&\leq \sup\{|x_1| + |y_1|, \dots, |x_n| + |y_n|\} \\
&= \sup\{(|x_1|, \dots, |x_n|) + (|\mathrm{y}_1|, \dots, |\mathrm{y}_n|)\} \\
&= \sup\{(|x_1|, \dots, |x_n|)\} + \sup\{(|\mathrm{y}_1|, \dots, |\mathrm{y}_n|)\} \\
&= \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty + \|(\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_n)\|_\infty \\
&= \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty.
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan diuraikan suatu lemma kekonveksan SOC norma $\|.\|_\infty$ berikut.

Lemma 12. *Diberikan suatu SOC norma* $\|.\|_\infty$
$C_n^\# = \{(\boldsymbol{u}, t) | \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_\infty \leq t\}$, *akan ditunjukkan* $C_n^\#$ *konveks untuk setiap* n.

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}_1, t_1), \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{u}_2, t_2) \in C_n^\#$ dengan $\|\boldsymbol{u}_1\|_\infty \leq t_1$ dan $\|\boldsymbol{u}_2\|_\infty \leq t_2$ dan sebarang skalar $\lambda \in [0,1]$, diperoleh

$$\lambda \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ t_1 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \boldsymbol{u}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{u}_2 \\ \lambda t_1 + (1-\lambda) t_2 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\|\lambda \boldsymbol{u}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{u}_2\|_\infty \leq \lambda \|\boldsymbol{u}_1\|_\infty + (1-\lambda)\|\boldsymbol{u}_2\|_\infty \leq \lambda t_1 + (1-\lambda) t_2.$$

Terbukti $C_n^\#$ merupakan himpunan konveks. ▪

Lemma 13. (Kekonveksan Irisan SOC Norma $\|.\|_\infty$). *Jika* $C_n^{\#i}, i = 1, \dots, k$ *adalah SOC norma* $\|.\|_\infty$ *yang konveks untuk setiap* i, *maka* $C^\# = C_n^{\#1} \cap C_n^{\#2} \cap \dots \cap C_n^{\#k}$ *himpunan konveks.*

Bukti: Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C^\#$ dan $\lambda \in [0,1]$. Akan ditunjukkan $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in C^\#$. Karena $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C_n^{\#1} \cap C_n^{\#2} \cap \dots \cap C_n^{\#k}$, maka $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C_n^{\#1}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C_n^{\#2}$, ..., dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C_n^{\#k}$. Karena $C_n^{\#1}, C_n^{\#2}, \dots, C_n^{\#k}$ konveks, maka $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in C_n^{\#1}$, $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in C_n^{\#2}$, ..., dan $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in C_n^{\#k}$. Diperoleh $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y} \in C^\#$. ▪

Lemma 14. (Kekonveksan pada SOCP norma $\|.\|_\infty$). *Untuk kendala SOCP terhadap pemetaan affine berlaku hubungan sebagai berikut:*

$$\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_\infty \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_i \\ \boldsymbol{c}_i^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_n^\#,$$

maka irisan kendala pada SOCP norma $\|.\|_\infty$ adalah himpunan konveks.

Bukti: Dari Lemma 7 telah ditunjukkan bahwa SOC dalam $\|.\|_2$ (8) dan SOC dalam $\|.\|_\infty$ ekuivalen. Selanjutnya, dari Lemma 12 SOC *cone* konveks *pointed closed* tak kosong dan menggunakan Lemma 13 irisan beberapa SOC pada (8) merupakan himpunan konveks. ▪

7. Dualitas SOCP Norma 1

Ingat masalah *second order cone programming* (SOCP) norma satu ($\|.\|_1$) (5) sebagai berikut:

minimumkan $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}$

dengan kendala $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + b_i\|_1 \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i, \;\; i = 1, \dots, m,$

dengan variabel $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, parameter $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$ dan $d_i \in \mathbb{R}$.

Sebelum membahas dualitas pada SOCP norma satu, akan diurai kembali sekilas mengenai bentuk Lagrange dan dulitas pada masalah bentuk Lagrange sebagai berikut.

Diberikan masalah optimisasi berkendala bentuk standar (tidak perlu konveks)

minimum $f_0(\boldsymbol{x})$

dengan kendala $f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \;\; i = 1, \dots, m$ (11)

$h_i(\boldsymbol{x}) = 0, \;\; i = 1, \dots, p$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ variabel, $\mathcal{D}$ domain, p^* nilai optimal.

Bentuk Lagrange (11) adalah:

Didefinisikan $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dengan $\mathbf{dom}\, L = \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$,

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda, \nu) = f_0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, f_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i \, h_i(\boldsymbol{x})$$

- jumlah terbobot fungsi tujuan dan fungsi kendala
- λ_i pengganda Lagrange berhubungan dengan $f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$
- ν_i pengganda Lagrange berhubungan dengan $h_i(\boldsymbol{x}) = 0$

Selanjutnya dapat dibentuk suatu fungsi dual Lagrange berikut:

Didefinisikan suatu fungsi dual Lagrange: $g: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dengan

$$\begin{aligned} g(\lambda, \nu) &= \inf_{x \in \mathcal{D}} L(\boldsymbol{x}, \lambda, \nu) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{D}} \left(f_0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, f_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i \, h_i(\boldsymbol{x}) \right) \end{aligned}$$

g suatu fungsi konkaf.

Sifat batas bawah: jika $\lambda \succcurlyeq 0$, maka $g(\lambda, \nu) \leq p^*$

Bukti: jika $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ fisibel dan $\lambda \succcurlyeq 0$, maka

$$f_0(\widetilde{\boldsymbol{x}}) \geq L(\widetilde{\boldsymbol{x}}, \lambda, \nu) \geq \inf_{x \in \mathcal{D}} L(\boldsymbol{x}, \lambda, \nu) = g(\lambda, \nu)$$

Meminimumkan atas semua fisibel $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ memberikan $p^* \geq g(\lambda, \nu)$

Dual masalah SOCP norma satu

Dual (5) adalah:

maksimumkan $\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{u}_i + d_i v_i)$

dengan kendala $\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{u}_i + c_i v_i) + \boldsymbol{f} = 0$ (12)

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_\infty \leq v_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

dengan variabel $\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{R}^{n_i}, v_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ dan data masalah diberikan sebagai $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}, \boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i}, c_i \in \mathbb{R}$ dan $d_i \in \mathbb{R}$.

Masalah (12) atau dual SOCP norma satu dapat diturunkan dengan dua cara berikut:

1. Mendefinisikan variabel baru $\boldsymbol{y}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ dan $t_i \in \mathbb{R}$ dan persamaan $y_i = \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i$, $t_i = \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x} + d_i$, dan menurunkan dual Lagrange.

2. Dimulai dari formulasi *conic* dari SOCP dan menggunakan dual *conic*. Menggunakan fakta bahwa *second order cone* (SOC) self dual:
   $t \geq \|\boldsymbol{u}_i\|_1 \Leftrightarrow tv + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} \geq 0$, untuk semua $v, \boldsymbol{y}$ sehingga $v \geq \|\boldsymbol{y}\|_1$
   Syarat $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} \leq tv$ ketaksamaan Cauchy-Schwarz sederhana.

Didefinisikan variabel baru, dan masalah menjadi:

minimumkan $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$

dengan kendala $\|\boldsymbol{y}_i\|_1 \leq t_i, \;\; i = 1, \dots, m,$ (13)

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i, t_i = \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i, \;\; i = 1, \dots, m,$$

Bentuk Lagrange (13) adalah:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t, \lambda, \nu, \mu)$$

$$= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{y} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\|\boldsymbol{y}_i\|_1 - t_i) + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{v}_i^T(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_i) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i(t_i - \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} - d_i)$$

$$= \left(\boldsymbol{c} - \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i^T\nu_i - \sum_{i=1}^{m} \mu_i\boldsymbol{c}_i\right)^T \boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i\|\boldsymbol{y}_i\|_1 + \nu_i^T\boldsymbol{y}_i) + \sum_{i=1}^{m}(-\lambda_i + \mu_i)t_i - \sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{b}_i^T\nu_i + d_i\mu_i).$$

Minimum atas $\boldsymbol{x}$ terbatas bawah jika dan hanya jika

$$\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i^T\nu_i + \mu_i\boldsymbol{c}_i) = \boldsymbol{c}.$$

Untuk meminimumkan atas $\boldsymbol{y}_i$,

$$\inf_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{D}}(\lambda_i\|\boldsymbol{y}_i\|_1 + \nu_i^T\boldsymbol{y}_i) = \begin{cases} 0 & \|\nu_i\|_1 \leq \lambda_i \\ -\infty & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Minimum atas t_i terbatas bawah jika dan hanya jika $\lambda_i = \mu_i$.

Fungsi dual lagrange:

$$L(\lambda, \nu, \mu) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{b}_i^T \nu_i + d_i \mu_i) & \text{jika } \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{A}_i^T \nu_i + \mu_i \boldsymbol{c}_i) = \boldsymbol{c}, \|\nu_i\|_\infty \leq \lambda_i, \mu = \lambda \\ -\infty & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Diperoleh masalah dual:

maksimumkan $-\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{b}_i^T \nu_i + d_i \lambda_i)$

dengan kendala $\sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{A}_i^T \nu_i + \lambda_i \boldsymbol{c}_i) = \boldsymbol{c}$ (14)

$\|\nu_i\|_\infty \leq \lambda_i, \;\; i = 1, \dots, m.$

Selanjutnya (14) merupakan suatu SOCP norma infinit.

SOCP sebagai masalah bentuk *conic*

minimumkan $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$ (15)

dengan kendala $-(\boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x} + d_i, \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i) \preccurlyeq_{K_i} \boldsymbol{0}, \;\; i = 1, \dots, m,$

dengan $K_i = \{(\boldsymbol{u}, t) | \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m-1}, t \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_1 \leq t\}$, yaitu SOC norma satu. Dual dari K_i adalah $K_i^* = \{(\boldsymbol{v}, w) | \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{m-1}, w \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{v}\|_\infty \leq w\}$.

Bentuk Lagrange dari (15) adalah:

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} - \sum_i (\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i)^T \boldsymbol{u}_i - \sum_i (\boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x} + d_i) \boldsymbol{v}_i$$

$$= \left(\boldsymbol{c} - \sum_i (\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{v}_i) \right)^T x - \sum_i (\boldsymbol{b}_i^T \boldsymbol{u}_i + d_i \boldsymbol{v}_i)$$

untuk $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{u}_i) \succcurlyeq_{K_i^*} 0$ (dengan $\boldsymbol{v}_i \geq \|\boldsymbol{u}_i\|_\infty$)

dengan

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) = \left(\boldsymbol{c} - \sum_i (A_i^T u_i + c_i v_i) \right)^T x - \sum_i (b_i^T u_i + d_i v_i)$$

fungsi dual:

$$g(\lambda,\nu,\mu) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{n}(b_i^T\nu_i + d_i\mu_i) & \text{jika } \sum_{i=1}^{m}(A_i^T\nu_i + \mu_i c_i) = c, \\ -\infty & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Dual *conic*:

maksimumkan $-\sum_{i=1}^{n}(b_i^T u_i + d_i v_i)$

dengan kendala $\sum_{i=1}^{m}(A_i^T u_i + v_i c_i) = c$

$$(v_i, u_i) \succcurlyeq_{K_i^*} 0, \;\; i = 1, \dots, m.$$

8. Metode Primal-Dual Interior-Point pada Masalah SOCP Norma 1

Ingat kembali masalah SOCP norma 1 (5) sebagai berikut

minimumkan $f^T x$

dengan kendala $\|A_i x + b_i\|_1 \le c_i^T + d_i, \;\; i = 1, \dots, N,$

dengan $x \in R^n$ variabel optimisasi, dan parameter masalah $f \in R^n, A_i \in R^{(n_i-1)\times n}, b_i \in R^{n_i-1}, c_i \in R^n$, dan $d_i \in R$. Norma pada kendala adalah norma 1, yaitu $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N}|x_i|$.

Untuk menyederhanakan notasi pada (5) digunakan

$$u_i = A_i x + b_i, \qquad t_i = c_i^T + d_i, \qquad i = 1, \dots, N,$$

sehingga (5) menjadi

minimumkan $f^T x$

dengan kendala $\|u_i\|_1 \le t_i, \;\; i = 1, \dots, N,$ (16)

$$u_i = A_i x + b_i, \;\; t_i = c_i^T + d_i, \;\; i = 1, \dots, N,$$

Dual (5) adalah

maksimumkan $-\sum_{i=1}^{N}(b_i^T z_i + d_i w_i)$

dengan kendala $\sum_{i=1}^{N}(A_i^T z_i + c_i w_i) = f$ (17)

$$\|z_i\|_1 \leq w_i, \ \ i = 1, \ldots, N.$$

Selanjutnya (5) disebut masalah primal dan (17) disebut masalah dual SOCP norma 1.

Perbedaan antara fungsi tujuan primal dan dual disebut gap dualitas didefinisikan dengan

$$\eta(x, z, w) = f^T x + \textstyle\sum_{i=1}^{N} (b_i^T z_i + d_i w_i). \tag{18}$$

Barrier untuk *cone* order kedua

Untuk $u \in R^{m-1}, t \in R$, didefinisikan

$$\phi(u, t) = \begin{cases} -\log\left(t^2 - \|u\|_1{}^2\right) & \|u\|_1 < t \\ \infty & \text{lainnya.} \end{cases} \tag{19}$$

Fungsi ϕ adalah fungsi Barrier untuk *cone* order kedua C_m: $\phi(u, t)$ berhingga jika dan hanya jika $(u, t) \in C_m$ (yaitu, $\|u\|_1 < t$), dan $\phi(u, t)$ konvergen ke ∞ untuk (u, t) mendekati batas C_m. $\phi(u, t)$ smooth dan konveks pada interior *cone* order kedua.

Fungsi Potensial Primal-Dual

Untuk (x, z, w) fisibel tegas, didefinisikan fungsi potensial primal-dual sebagai

$$\varphi(x, z, w) = \left(2N + \nu\sqrt{2N}\right) \log \eta + \sum_{i=1}^{N} \left(\phi(u_i, t_i) + \phi(z_i, w_i)\right) - 2N \log N \tag{20}$$

dengan $\nu \geq 1$ sebagai suatu parameter algoritma, dan η gap dualitas terkait (x, z, w). Sifat yang paling penting dari fungsi potensial adalah ketaksamaan

$$\eta(x, z, w) \leq \exp\left(\varphi(x, z, w)/\nu\sqrt{2N}\right), \tag{21}$$

yang memenuhi untuk semua x, z, w fisibel tegas. Sehingga, jika fungsi potensial kecil, gap dualitas juga kecil. Khususnya, jika $\varphi \to -\infty$, maka $\eta \to 0$ dan (x, z, w) mendekati keoptimalan.

Ketaksamaan (21) dapat dengan mudah ditunjukkan dengan fakta bahwa

$$\psi(x,z,w) \triangleq 2N\log\eta + \sum_{i=1}^{N}\big(\phi(u_i,t_i)+\phi(z_i,w_i)\big) - 2N\log N \geq 0 \qquad (22)$$

untuk semua x, z, w fisibel tegas. Akibatnya $\varphi(x,z,w) \geq \nu\sqrt{2N}\log\big(\eta(x,z,w)\big)$, dan merupakan (21).

Algoritma Reduksi Potensial Primal-Dual

Metode ini dimulai dengan x, z, w fisibel tegas primal-dual dan memperbarui x, z, w dalam suatu cara dimana fungsi potensial $\varphi(x,z,w)$ direduksi pada setiap iterasi oleh sedikitnya suatu jumlah yang terjamin.

Pada setiap iterasi dari metode, arah pencarian primal dan dual $\delta x, \delta z, \delta w$ dihitung dengan menyelesaikan himpunan persamaan linear

$$\begin{bmatrix} H^{-1} & \bar{A} \\ \bar{A}^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta Z \\ \delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H^{-1}(\rho Z + g) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (23)$$

dalam variabel $\delta x, \delta Z$, dengan $\rho = \big(2N + \nu\sqrt{2N}\big)/\eta$, dan

$$H = \begin{bmatrix} \nabla^2\phi(u_1,t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \nabla^2\phi(u_N,t_N) \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} \nabla\phi(u_1,t_1) \\ \vdots \\ \nabla\phi(u_N,t_N) \end{bmatrix},$$

$$H = [z_1^T w_1 \quad \cdots \quad z_N^T w_N]^T, \delta Z = [\delta z_1^T \delta w_1 \quad \cdots \quad \delta z_N^T \delta w_N]^T.$$

Algoritma Reduksi Potensial Primal-Dual

Diberikan x, z, w fisibel tegas, suatu toleransi $\epsilon > 0$, dan suatu parameter $\nu \geq 1$.

Ulangi

1. Dapatkan arah pencarian primal dan dual dengan menyelesaikan (23).
2. *Pencarian Plane*. Dapatkan $p, q \in R$ yang meminimumkan $\varphi(x + p\delta x, z + q\delta z, w + q\delta w)$.
3. *Perbarui*. $x \coloneqq x + p\delta x, z \coloneqq z + q\delta z, w \coloneqq w + q\delta w$.

Sampai $\eta(x,z,w) \leq \epsilon$.

Pada setiap iterasi fungsi potensial turun sedikitnya sebanyak:

$$\varphi\left(x^{(k+1)}, z^{(k+1)}, w^{(k+1)}\right) \leq \varphi\left(x^{(k)}, z^{(k)}, w^{(k)}\right) - \delta$$

dengan $\delta > 0$.

Metode Titik-Interior Primal-Dual

Kembali lagi pada masalah second order *cone* programming (SOCP) problem $\|.\|_1$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &\text{minimumkan } \boldsymbol{c}_1^T \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{c}_n^T \boldsymbol{x}_n \\ &\text{dengan kendala } \boldsymbol{A}_1\, \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{A}_n\, \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{b} \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{x}_i \succcurlyeq_{C_n} \boldsymbol{0} \text{ for } i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{24}$$

dengan $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^n$ variabel keputusan, $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$ parameter, dan C_n SOC $\|.\|_1$ didefinisikan sebagai:

$$C_n = \{(\boldsymbol{u}, t) | \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_1 \leq t\}.$$

SOCP (24) disebut sebagai masalah primal.

Diasumsikan dual $\|.\|_\infty$ adalah $\|.\|_1$. Sehingga bentuk dual (24) merupakan SOCP $\|.\|_\infty$ yaitu:

$$\begin{aligned} &\text{maksimumkan } \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\ &\text{dengan kendala } \boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{c}_i \text{ for } i = 1, \dots, n \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{s}_i \succcurlyeq_{C_n^*} \boldsymbol{0} \text{ for } i = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{25}$$

dengan $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n$ variabel keputusan, $\boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$ parameter, dan C_n^* SOC $\|.\|_\infty$ didefinisikan sebagai:

$$C_n^* = \{(\boldsymbol{u}, t) | \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_\infty \leq t\}.$$

Dasar-dasar Aljabar

Teorema 1. *Diberikan $\boldsymbol{x}$ mempunyai dekomposisi spektral $\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{c}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{c}_2$, maka $\lambda_1^2 = (x_0 + \|\overline{\boldsymbol{x}}\|)^2$ dan $\lambda_2^2 = (x_0 - \|\overline{\boldsymbol{x}}\|)^2$ nilai eigen of $Q_{\boldsymbol{x}}$. Lebih lanjut, jika $\lambda_1 \neq \lambda_2$ maka setiap nilai eigen mempunyai satu perkalian; vektor eigen* *bersesuaian berturut-turut adalah* $\boldsymbol{c}_1$ *dan* $\boldsymbol{c}_2$*. Sebagai tambahan,* $\det(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_0^2 - \|\overline{\boldsymbol{x}}\|^2$ *nilai eigen* $Q_{\boldsymbol{x}}$*, dan mempunyai perkalian dengan* $n-2$ *ketika* $\boldsymbol{x}$ *nonsingular dan* $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Teorema 2. *Untuk setiap* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}$ *nonsingular maka terdapat gradien* $\nabla_{\boldsymbol{x}}(\ln\det(\boldsymbol{x})) = 2\boldsymbol{x}^{-1}$*, dan Hessian* $\nabla_{\boldsymbol{x}}^2(\ln\det(\boldsymbol{x})) = -2Q_{\boldsymbol{x}^{-1}}$*, dan secara umum* $D_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{x}^{-1} = -2Q_{\boldsymbol{x}^{-1}}\boldsymbol{u}$*, dengan* $D_{\boldsymbol{u}}$ *differensial dalam arah* $\boldsymbol{u}$*.*

$Q_{\boldsymbol{x}}$ transformasi linear berhubungan dengan setiap $\boldsymbol{x}$ disebut representasi kuadratik yang didefinisikan

$$Q_{\boldsymbol{x}} \overset{\text{def}}{\equiv} 2\text{Arw}^2(\boldsymbol{x}) - \text{Arw}(\boldsymbol{x}^2) = \begin{bmatrix} \|\boldsymbol{x}\|^2 & 2\boldsymbol{x}_0\overline{\boldsymbol{x}}^T \\ 2\boldsymbol{x}_0\overline{\boldsymbol{x}} & \det(\boldsymbol{x})\, I + 2\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{x}}^T \end{bmatrix} = (2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T - \det(\boldsymbol{x})\, R).$$

Metode Primal-Dual Path Following

Untuk $\boldsymbol{x} \in \text{int}\, C_n$ fungsi $-\ln\det(\boldsymbol{x})$ merupakan fungsi barrier konveks untuk C_n , yaitu $\nabla_{\boldsymbol{x}}^2(\ln\det(\boldsymbol{x})) = -2Q_{\boldsymbol{x}^{-1}}$, namun jika $\lambda_{1,2} > 0$ nilai eigen $\boldsymbol{x}$, maka $\lambda_{1,2}^{-1} > 0$ nilai eigen $\boldsymbol{x}^{-1}$. Akibatnya, $Q_{\boldsymbol{x}^{-1}}$ mempunyai nilai eigen positif dan merupakan definit positif.

Jika ketaksamaan $\boldsymbol{x}_i \succcurlyeq_{C_n} \boldsymbol{0}$ dalam (4) diganti dengan $\boldsymbol{x}_i \succ_{C_n} \boldsymbol{0}$ dan ditambahkan suku barrier logaritmik $-\mu\sum_i \ln\det(\boldsymbol{x}_i)$ ke fungsi tujuan pada masalah primal diperoleh

$$\begin{aligned} (P_\mu)\ & \text{minimumkan } \sum_{i=1}^n \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}_i - \mu\sum_{i=1}^n \ln\det(\boldsymbol{x}_i) \\ & \text{dengan kendala } \sum_{i=1}^n \boldsymbol{A}_i\ \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{b} \qquad (26) \\ & \boldsymbol{x}_i \succ_{C_n} \boldsymbol{0} \text{ untuk } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Syarat keoptimalan Karush-Kuhn-Tucker (KKT) untuk (26) adalah:

$$\sum_{i=1}^n \boldsymbol{A}_i\ \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{b} \qquad (27)$$

$$\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{A}_i^T\boldsymbol{y} - 2\mu\boldsymbol{x}_i^{-1} = \boldsymbol{0}, \text{ untuk } i = 1, \dots, n \qquad (28)$$

$$\boldsymbol{x}_i \succ_{C_n} \boldsymbol{0} \text{ untuk } i = 1, \dots, n. \qquad (29)$$

Bentuk $\boldsymbol{s}_i \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{y}$. Sebarang solusi P_μ memenuhi:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_i \boldsymbol{A}_i \ \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{b} \\
&\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{c}_i \text{ untuk } i = 1, \dots, n \\
&\boldsymbol{x}_i \circ \boldsymbol{s}_i = 2\mu \boldsymbol{e} \text{ untuk } i = 1, \dots, n \\
&\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{s}_i \succ_{C_n} \ \boldsymbol{0} \text{ untuk } i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{30}$$

Secara sama menggantikan $\boldsymbol{s}_i \succcurlyeq_{C_n^*} \boldsymbol{0}$ dalam (25) dengan $\boldsymbol{s}_i \succ_{C_n^*} \boldsymbol{0}$, pada dual dan menambahkan barrier barrier $\mu \sum_i \ln \det(\boldsymbol{s}_i)$ ke tujuan dual berakibat:

$$\begin{aligned}
(D_\mu) \text{ maksimumkan } & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} + \mu \textstyle\sum_{i=1}^n \ln \det(\boldsymbol{s}_i) \\
\text{dengan kendala } & \boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{c}_i \text{ untuk } i = 1, \dots, n \\
& \boldsymbol{s}_i \succ_{C_n^*} \boldsymbol{0} \text{ untuk } i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{31}$$

Secara sama syarat KKT untuk (31) adalah:

$$\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{c}_i \tag{32}$$

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_i \ \boldsymbol{x}_i + 2\mu \boldsymbol{s}_i^{-1} = \boldsymbol{0}, \text{ untuk } i = 1, \dots, n \tag{33}$$

$$\boldsymbol{s}_i \succ_{C_n^*} \boldsymbol{0} \text{ untuk } i = 1, \dots, n. \tag{34}$$

Bentuk $\boldsymbol{s}_i \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{y}$. Sebarang solusi P_μ memenuhi:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{c}_i \\
&\boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{c}_i \text{ untuk } i = 1, \dots, n \\
&\boldsymbol{x}_i \circ \boldsymbol{s}_i = 2\mu \boldsymbol{e} \text{ untuk } i = 1, \dots, n \\
&\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{s}_i \succ_{C_n} \ \boldsymbol{0} \text{ untuk } i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{35}$$

Definisi 8. *Titik trayektori* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ *memenuhi* (30) *untuk* μ *merupakan central path berhubungan dengan masalah* (24) *dan* (25).

Metode Titik Interior Primal-Dual Path-following:

1. Menerapkan metode Newton pada sistem (30) untuk mendapatkan arah $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{s})$ yang mereduksi gap dualitas, dan mengambil langkah dalam arah ini untuk meyakinkan bahwa titik baru tetap fisibel dan dalam interior C_n .
2. Reduksi μ dengan suatu faktor konstan dan proses diulangi.

Jika pada (30) $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}$ dan $\boldsymbol{s}_i$ diganti dengan $\boldsymbol{x}_i + \Delta\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y} + \Delta\boldsymbol{y}$, dan $\boldsymbol{s}_i + \Delta\boldsymbol{s}_i$, meluaskan sukunya dan eliminasi semua suku nonlinear dalam Δ maka:

$$\textstyle\sum_i \boldsymbol{A}_i\ \Delta\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{b} - \sum_i \boldsymbol{A}_i\ \boldsymbol{x}_i \tag{34}$$

$$\boldsymbol{A}_i^T \Delta\boldsymbol{y} + \Delta\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{A}_i^T \boldsymbol{y} - \boldsymbol{s}_i \text{ untuk } i = 1, \dots, n \tag{37}$$

$$\boldsymbol{s}_i \circ \Delta\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{x}_i \circ \Delta\boldsymbol{s}_i = 2\mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}_i \circ \boldsymbol{s}_i \text{ untuk } i = 1, \dots, n \tag{38}$$

Sistem dalam bentuk matriks blok

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{I} \\ \operatorname{Arw}(\boldsymbol{s}) & \boldsymbol{0} & \operatorname{Arw}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{y} \\ \Delta\boldsymbol{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_p \\ \boldsymbol{r}_d \\ \boldsymbol{r}_c \end{bmatrix} \tag{39}$$

dengan $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n), \boldsymbol{s} = (\boldsymbol{s}_1, \dots, \boldsymbol{s}_n), \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_n)$ adalah vektor-vektor $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{s}_i, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$, dan

$$\boldsymbol{r}_p \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{r}_d \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{s},\ \boldsymbol{r}_c \stackrel{\text{def}}{=} 2\mu\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{s}.$$

$\boldsymbol{r}_p = \boldsymbol{0}$ jika $\boldsymbol{x}$ fisibel primal, dan $\boldsymbol{r}_d = \boldsymbol{0}$ jika $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ fisibel dual.

Menerapkan eliminasi Gauss blok ke (39) memenuhis:

$$\Delta\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}\operatorname{Arw}^{-1}(\boldsymbol{s})\operatorname{Arw}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}^T)^{-1}\left(\boldsymbol{r}_p + \boldsymbol{A}\operatorname{Arw}^{-1}(\boldsymbol{s})(\operatorname{Arw}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{r}_d - \boldsymbol{r}_c)\right) \tag{40}$$

$$\Delta\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}_d - \boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y} \tag{41}$$

$$\Delta\boldsymbol{x} = -\operatorname{Arw}^{-1}(\boldsymbol{s})(\operatorname{Arw}(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r}_c) \tag{42}$$

(40)-(42) mereduksi gap dualitas.

Berikan $\boldsymbol{p} \succ_{C_n} \mathbf{0}$. Terhadap $\boldsymbol{p}$, definisikan $\widehat{\boldsymbol{u}} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{u}$ dan $\breve{\boldsymbol{u}} \stackrel{\text{def}}{=} Q_{\boldsymbol{p}^{-1}}\boldsymbol{u}$.

Karena $Q_{\boldsymbol{p}}Q_{\boldsymbol{p}^{-1}} = \boldsymbol{I}$, operator $\hat{}$ dand $\check{}$ saling invers. Ubah variabel $\boldsymbol{x} \to \widehat{\boldsymbol{x}}$, pasangan primal-dual (24) dan (25) menjadi

$$
\begin{aligned}
&\text{minimumkan } \breve{\boldsymbol{c}}_1^T\widehat{\boldsymbol{x}}_1 + \cdots + \breve{\boldsymbol{c}}_n^T\widehat{\boldsymbol{x}}_n \\
&\text{dengan kendala } \breve{\boldsymbol{A}}_1\, \widehat{\boldsymbol{x}}_1 + \cdots + \breve{\boldsymbol{A}}_n\, \widehat{\boldsymbol{x}}_n = \boldsymbol{b} \\
&\qquad\qquad \widehat{\boldsymbol{x}}_i \succcurlyeq_{C_n} \mathbf{0} \text{ untuk } i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{43}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{maksimumkan } \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\
&\text{dengan kendala } \breve{\boldsymbol{A}}_i^T\boldsymbol{y} + \breve{\boldsymbol{s}}_i = \breve{\boldsymbol{c}}_i \text{ untuk } i = 1, \dots, n \\
&\qquad\qquad \breve{\boldsymbol{s}}_i \succcurlyeq_{C_n^*} \mathbf{0} \text{ untuk } i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{44}
$$

dengan $\boldsymbol{s} \to \breve{\boldsymbol{s}}$, $\boldsymbol{c} \to \breve{\boldsymbol{c}}$, $\boldsymbol{A}_i \to \breve{\boldsymbol{A}}_i = \boldsymbol{A}_i\, Q_{\boldsymbol{p}_i^{-1}}$ dan akibatnya $\boldsymbol{A} \to \breve{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}Q_{\boldsymbol{p}^{-1}}$.

Definisi 9. *Himpunan arah* $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{s})$ *yang dikembangkan dari* $\boldsymbol{p}$ *dengan* $\widehat{\boldsymbol{x}}$ *dan* $\breve{\boldsymbol{s}}$ *operator komutatif disebut klas arah komutatif; suatu arah dalam klas ini disebut arah komutatif.*

Andaikan $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ titik fisibel dalam persekitaran terkait dan $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{s})$ arah dengan $\mu = \frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{z})}{2r}\sigma$ untuk suatu konstan $\sigma \in (0,1)$, berakibat ke titik fisibel baru $(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \Delta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{s} + \Delta\boldsymbol{s})$. Maka

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}\big((\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) \circ (\boldsymbol{s} + \Delta\boldsymbol{s})\big) &= \operatorname{tr}(\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{s}) + \operatorname{tr}(\Delta\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{s} + \boldsymbol{x} \circ \Delta\boldsymbol{s}) + \operatorname{tr}(\Delta\boldsymbol{x} \circ \Delta\boldsymbol{s}) \\
&= \operatorname{tr}(\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{s}) + \operatorname{tr}\left(\sigma\frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{x}\circ\boldsymbol{z})}{2r}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{s}\right) + \operatorname{tr}(\Delta\boldsymbol{x} \circ \Delta\boldsymbol{s}) \\
&= \sigma \operatorname{tr}(\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{s}) + 2\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{s}
\end{aligned}
$$

Karena diasumsikan $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{s})$ fisibel, $\boldsymbol{r}_p = \mathbf{0}$ dan $\boldsymbol{r}_d = \mathbf{0}$, yang berakibat $\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{s} = \mathbf{0}$. Maka pada setiap iterasi gap dualitas direduksi dengan faktor σ.

BAB 5. KESIMPULAN DAN SARAN

KESIMPULAN

1. Perumusan SOC norma 1

$$C_m^* = \{(\boldsymbol{u}, t) | \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m-1}, t \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_1 \leq t\}.$$

2. Perumusan masalah SOCP norma 1

   meminimumkan $\boldsymbol{f}^T \boldsymbol{x}$,
   dengan kendala $\|\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_1 \leq \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x} + d_i \ (i = 1, \dots, N)$

   dengan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel keputusan, dan parameter $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1)\times n}, \boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$ dan $d_i \in \mathbb{R}$.

3. Algoritma masalah SOCP norma 1 dengan metode (primal-dual) titik interior
   a. Menerapkan metode Newton pada sistem (30) untuk mendapatkan arah $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{s})$ yang mereduksi gap dualitas, dan mengambil langkah dalam arah ini untuk meyakinkan bahwa titik baru tetap fisibel dan dalam interior C_n .
   b. Reduksi μ dengan suatu faktor konstan dan proses diulangi.

c. Solusi masalah SOCP norma 1 dengan metode (primal-dual) titik interior.

   Algoritma Reduksi Potensial Primal-Dual

   Diberikan x, z, w fisibel tegas, suatu toleransi $\epsilon > 0$, dan suatu parameter $\nu \geq 1$.

   Ulangi

   1. Dapatkan arah pencarian primal dan dual dengan menyelesaikan (23).
   2. *Pencarian Plane*. Dapatkan $p, q \in R$ yang meminimumkan $\varphi(x + p\delta x, z + q\delta z, w + q\delta w)$.
   3. *Perbarui*. $x \coloneqq x + p\delta x, z \coloneqq z + q\delta z, w \coloneqq w + q\delta w$.

   Sampai $\eta(x, z, w) \leq \epsilon$.

SARAN

Penelitian mengenai masalah SOCP Norma 1 masih sangat terbuka untuk digali. Untuk selanjutnya dapat dilihat penerapan dari teori SOCP Norma 1 dalam kehidupan sehari-hari.

DAFTAR PUSTAKA

Ahuja, R. and Orlin, J.B., 2001. *Inverse Optimization*. Oper. Res., 49:771-783.

Alizadeh, F. and Goldfarb, D. 2003. Second-order *Cone* programming. *Math. Program*, 95, 3-51.

Andersen, E.D., Roos, C., and Terlaky, T. 2002. Notes on duality in second order and p-order *Cone* optimization. *A Journal of Mathematical Programming and Operation Research*, Volume 51, Issue 4, pages 627-643.

Andersen, E.D., Roos, C., and Terlaky, T. 2000. On Implementing a Primal-dual Interior-point Method for *Conic* Quadratic Optimization. *www.**optimization**-online.org/DB_FILE/2000/12/245.pdf*

Bai, Y.Q., and Wang, G.Q. 2009a. Primal-Dual Interior-Point Algorithms for Second-Order *Cone* Optimization Based on Kernel Functions. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applcations* 70 3584-3602. *Elsevier*.

Bai, Y.Q., and Wang, G.Q. 2009b. A Primal-Dual Interior-Point Algorithm for Second-Order *Cone* Optimization with Full Nesterov-Todd Step. *Applied Mathematics and Computation* 215 1047-1061. *Elsevier*.

Bai, Y.Q., and Wang, G.Q. 2007. Primal-dual Interior-point Algorithms for Second-order *Cone* Optimization Based on a New Parametric Kernel Function. *Acta Mathematica Sinica* Vol. 23 Issue 11 p2027. *Springer-Verlag*.

Becker, S., Candes, E.J. and Grant, M. 2011. Templates for convex *Cone* problems with applications to sparse signal recovery. *Mathematical Programming Computation*, Vol 3, Number 3, 165-218.

Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. 2001. *Lectures on Modern Convex Optimization.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, Analysis, algorithms, and engineering applications.

Boyd, S. and Vandenberghe, L. 2004. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York.

Brown, D.B. 2009. *Convex Optimization: SOCP, SDP, and Some Applications.* Lecture Notes. Duke University, The Fuqua School of Business.

Burton, D. and Toint, P.L. 1992. *On an Instance of Inverse Shortest Path Problem.* Math Prog., 53: 45-61.

Burton, D. and Toint, P.L. 1994. *On the Inverse Shortest Path Algorithm for Recovering Linearly Correlated Costs.* Math Prog., 55: 1-22.

Candes, E.J. and Tao, T. 2005. The Dantzig selector: statistical estimation when *p* is much larger than *n*. *Annals of Statistics*, pages 2313-2351.

Cao, Q., Yu, Z., and Wang, A. 2010. A Boxed Optimization Reformulation for the Convex Second Order *Cone* Programming. *AMO-Advanced Modeling and Optimization,* Volume 12, Number 1.

Iyengar, G. and Kang, W. 2003. *Inverse Conic Programming with Applications*. Op. Res. Lett., 33:319-330.

Kahl, F. And Hartley, R. 2008. Multiple View Geometry Under the L_∞-norm. *IEEE Transactions Analysis Machine Intelligence*, Volume: 30, Issue: 9, pages 1603-1617.

Kwak, N. 2008. Principal Component Analysis based on L_1-norm Maximization. *IEEE Transactions Analysis Machine Intelligence*, Volume: 30, Issue: 9, pages 1672-1680.

Lobo, M.S., Vandenberghe, L., Boyd, S., and Lebret, H. 1998. Applications of second-order *Cone* programming. *Linear Algebra and its Applications* 284, 193-228.

Schmidt, M. 2005. Least squares optimization with L_1-norm regularization.

Diunduh dari http://www.di.ens.fr/~mschmidt/Software/lasso.pdf

tanggal 20 Mei 2012.

Sokkalingam, P.T., Ahuja, R.K. and Orlin. 1999. *Solving Inverse Spanning Tree Problem Through Network Flow Techniques.* Oper. Res., 47(2): 291-298.

Tarantola, A. 2005. *Inverse Problem Theory: Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation.* Elsevier, Amsterdam.

Yamashita, H. and Yabe, H. 2005. A primal-dual interior point method for nonlinear optimization over second order *cone*s.

www.msi.co.jp/nuopt/download/paper/module/socp.pdf

LAMPIRAN 1 Personalia Tenaga Peneliti Beserta Kualifikasinya

Nama	:	Caturiyati, M.Si.
Tempat, Tanggal Lahir	:	Jakarta, 18 Desember 1973
NIP	:	19731218 200003 2 001
Pangkat / Golongan	:	Penata / IIIc
Jabatan	:	Lektor
Unit Kerja	:	Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta.

Riwayat Pendidikan

1. SD Negeri 07 Manggarai Jakarta Selatan, 1980 – 1986
2. SMP Negeri 3 Manggarai Jakarta Selatan, 1986 – 1989
3. SMA Negeri 8 Jakarta, 1989 – 1992
4. S1, Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, FMIPA, UGM, 1992 - 1998
5. S2, Jurusan Matematika, FMIPA, UGM, 1998 – 2002

Pengalaman Mengajar

1. Aljabar Linear I
2. Aljabar Linear II
3. Program Linear
4. Riset Operasi
5. Teori Himpunan Samar
6. Teori Permainan

Karya Ilmiah

A. Publikasi Internasional:

1. Caturiyati, *The Application of Block Triangular Decoupling for Linear Systems over Principal Ideal Domains on the Pole Assignment,* Proceedings of the SEAMS-GMU (**S**outheast **A**sian **M**athematical **S**ociety-**G**adjah **M**ada **U**niversity) **International** Conference on Mathematics and its Applications, UGM, July 14-17, **2003**, hal. 83-92. Published in 2003. **ISBN : 979 - 95118-5-2.**

B. Publikasi di Jurnal Nasional Terakreditasi DIKTI:

1. Caturiyati dan Sri Wahyuni, *Eksistensi Submodul Ketercapaian Tipe Feedback Terbesar*, **B**uletin **I**mliah **M**atematika dan **I**lmu **P**engetahuan **A**lam (**BIMIPA**), No.3 Tahun: XII 2002, hal M-66-M-74, **2002**. **ISSN: 0215-9309.** SK Dirjen DIKTI Akreditasi Jurnal No. 22/DIKTI/Kep/2002 Tanggal 8 Mei 2002.

2. Caturiyati, *Sistem Dinamik Linear Koefisien Konstan (The Linear Dynamical Systems with Constant Coeficients)*, Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains (JPMS), No.1, Th.VI/2001, hal. 18-25, FMIPA UNY (Universitas Negeri Yogyakarta), Supported by **J**apan **I**nternational **C**ooperation **A**gency (**JICA**).

ISSN : 1410-1866. SK Dirjen DIKTI Depdiknas Akreditasi Jurnal No.118/DIKTI/Kep/2001.

3. **Elly Arliani, Mathilda Susanti, Kana Hidayati, Caturiyati, Husna Arifah,** *Implementasi Problem Based Learning dengan Peer Lessons pada Pembelajaran Statistika Matematis Guna Meningkatkan Kemandirian Belajar (Implementation of Problem Based Learning With Peer Lessons in Mathematical Statistics for Increase Self Regulated Learning)*, Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains (JPMS), Edisi 2, Th.XII, Nopember 2007, hal. 67-75, FMIPA UNY (Universitas Negeri Yogyakarta), **ISSN : 1410-1866**. SK Dirjen DIKTI Depdiknas Akreditasi Jurnal No.39/DIKTI/Kep/2004.

C. Publikasi di Jurnal Nasional Tak Terakreditasi DIKTI:

1. Validitas Konstruk *(construct validity)* dalam Pengembangan Instrumen Penilaian Non-Kognitif, Prosiding Seminar PIPM Jurdik Mat FMIPA UNY, (Kelompok,2005).
2. Inversi Dan Titik-Titik Harmonis (Diterbitkan Pada Jurnal Pythagoras Volume 3, Nomor 1, Juni 2007, ISSN: 1978 – 4538, Hal : 78 - 84)
3. Hambatan-hambatan dalam Mengembangkan Kecerdasan Logical/ Mathematical Pada Pembelajaran Terpadu Model Webbed Berbasis Kecerdasan Jamak di TKIT Salman Al Farisi II Yogyakarta (Studi Eksplorasi) (Diterbitkan Pada Jurnal Pythagoras Volume 3, Nomor 2, Desember 2007, ISSN: 1978 – 4538, Hal : 72 - 87)
4. Penyelesaian Asymmetric Travelling Salesman Problem Dengan Algoritma Hungarian Dan Algoritma Cheapest Insertion Heuristic, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika PIPM Jurdik Matematika FMIPA UNY 2008, ISBN: 978-979-16353-1-8, Hal: 333-343.
5. Metode Reduksi Ukuran Pada Masalah Penugasan Kuadratik Simetris (Size Reduction Method Over Simmetric Quadratic Assignment Problem (SQAP)), Prosiding Seminar Nasional Aljabar, Pembelajaran Aljabar dan Penerapannya 2009, ISBN: 978-979-16353-2-5, Hal: 123-132.
6. Upaya-upaya Mengembangkan Kecerdasan Logical/Mathematical Pada Pembelajaran Terpadu Model Webbed Berbasis Kecerdasan Jamak di TKIT Salman Al Farisi II Yogyakarta (Studi Eksplorasi), Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2007, ISBN: 978-979-25-0712-6, Hal:213-242.
7. Upaya Peningkatan Kualitas Pembelajaran Komputasi Statistik Melalui Perkuliahan Online Pada Mahasiswa Program Studi Matematika FMIPA UNY, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2007, ISBN: 978-979-25-0712-6, Hal:313-334.
8. Penerapan Kestabilan Titik Equilibrium Sistem Reaksi Difusi Pada Masalah Epidemik Model Sir, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2007, ISBN: 978-979-25-0712-6, Hal:569-582.
9. Sifat-sifat Super Matriks dan Super Ruang Vektor, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2009, ISBN: 978-979-16353-3-2, Hal:
10. Syarat Fritz John pada Masalah Optimasi Berkendala Ketaksamaan, Jurnal Pythagoras Vol 5, No. 2, Des 2009, 112-121, Jurusan Pendidikan Matematika UNY 2009.

11. Pemanfaatan Excel Solver Dalam Pembelajaran Pemrograman Linear, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2010.
12. Optimisasi Konveks: Konsep-konsep, Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA FMIPA UNY 2011, ISBN: 978-979-99314-5-0, Hal: M-367 – M-374.
13. Sifat-sifat Invarian Pada Inversi, Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA FMIPA UNY 2011, ISBN: 978-979-99314-5-0, Hal: M-295 – M-298.
14. *Second Order Cone* (SOC) dan Sifat-Sifat Kendala *Second Order Cone Programming* Dengan Norma 1, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2012.
15. Kekonveksan Daerah Fisibel *Second Order Cone Programming* Dengan Norma 1, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2012.
16. Paper berjudul *Program Cone Order Dua pada* $(\mathbb{R}^n_+, \|.\|_1)$, dipresentasikan pada seminar KNM IndoMS di Uninersitas Padjajaran Bandung.
17. Paper berjudul *Second Order Cone* (Soc) Dan Sifat-Sifat Kendala *Second Order Cone Programming* Dengan Norma ∞, dipresentasikan di UNY.
18. Paper berjudul *Kekonveksan Daerah Fisibel Second Order Cone Programming dengan Norma* ∞, dipresentasikan di UGM dan dalam proses editing jurnal nasional.
19. Paper berjudul *Metode Titik Interior pada Masalah Second Order Cone Programming dengan Norma* 1, dipresentasikan di UNS dan dalam proses editing jurnal nasional.
20. Paper berjudul *Primal-Dual Interior-Point Method on the Second Order Cone Programming Norm* 1, dipresentasikan pada IICMA 2013 di UGM dan dalam proses editing jurnal internasional.
21. Paper berjudul *Masalah Dualitas dalam SOCP Norma Satu*, dipresentasikan di UNY dan dalam proses editing jurnal nasional.

Yogyakarta, Nopember 2013

Caturiyati, M.Si.

LAMPIRAN 2 PUBLIKASI

1. *Second Order Cone* (SOC) dan Sifat-sifat Kendala *Second Order Cone Programming* dengan Norma 1, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2012.
2. Kekonveksan Daerah Fisibel *Second Order Cone Programming* Dengan Norma 1, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2012.
3. Paper berjudul Program *Cone* Order Dua pada $(\mathbb{R}_+^n, \|.\|_1)$, dipresentasikan pada seminar KNM IndoMS di Uninersitas Padjajaran Bandung.
4. Paper berjudul *Second Order Cone* (SOC) dan Sifat-sifat Kendala *Second Order Cone Programming* dengan Norma ∞, dipresentasikan di UNY.
5. Paper berjudul Kekonveksan Daerah Fisibel *Second Order Cone Programming* dengan Norma ∞, dipresentasikan di UGM dan dalam proses editing jurnal nasional.
6. Paper berjudul Metode Titik Interior pada Masalah *Second Order Cone Programming* dengan Norma 1, dipresentasikan di UNS dan dalam proses editing jurnal nasional.
7. Paper berjudul Primal-Dual Interior-Point Method on the Second Order Cone Programming Norm 1, dipresentasikan pada IICMA 2013 di UGM dan dalam proses editing jurnal internasional.
8. Paper berjudul Masalah Dualitas dalam SOCP Norma Satu, dipresentasikan di UNY dan dalam proses editing jurnal nasional.

HIMPUNAN MATEMATIKA INDONESIA 1976

Sertifikat

diberikan kepada

Caturiyati

atas partisipasinya dalam **Konferensi Nasional Matematika** XVI dengan tema:
"Matematika sebagai Bahtera Pendidikan untuk Mencerdaskan Kehidupan Bangsa"
yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Padjadjaran
bekerja sama dengan Indonesian Mathematical Society (IndoMS) pada tanggal 3-6 Juli 2012
di Universitas Padjadjaran Kampus Jatinangor
sebagai

Pemakalah

dengan judul

"Program Cone Order Dua"

Jatinangor, 6 Juli 2012

Indonesian Mathematical Society	Panitia KNM XVI
Presiden	Ketua
Prof. Dr. Widodo, M.S.	Prof. Dr. Asep K. Supriatna

No. 930/UN.34.13/PP/2012

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

SERTIFIKAT

Diberikan kepada

Caturiyati

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Atas partisipasinya sebagai

PEMAKALAH

dengan judul

"SECOND ORDER CONE (SOC) DAN SIFAT-SIFAT KENDALA SECOND ORDER CONE PROGRAMMING DENGAN NORMA 1"

dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika
yang diselenggarakan oleh Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY pada tanggal 10 November 2012

Dekan Fakultas MIPA

Dr. Hartono
NIP. 19620329 198702 1 002

Yogyakarta, 10 November 2012
Ketua Penyelenggara

Emut, M.Si
NIP. 19621215 198812 1 001

Kontribusi Pendididikan Matematika dan Matematika dalam Membangun Karakter Guru dan Siswa

No. 930/UN.34.13/PP/2012

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

SERTIFIKAT

Diberikan kepada

Caturiyati

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Atas partisipasinya sebagai

PEMAKALAH

dengan judul

"KEKONVEKSKAN DAERAH FISIBEL SECOND ORDER CONE PROGRAMMING DENGAN NORMA 1"

dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika
yang diselenggarakan oleh Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY pada tanggal 10 November 2012

Yogyakarta, 10 November 2012

Dekan Fakultas MIPA

Dr. Hartono
NIP. 19620329 198702 1 002

Ketua Penyelenggara

Emut, M.Si
NIP. 19621215 198812 1 001

Kontribusi Pendidikan Matematika dan Matematika dalam Membangun Karakter Guru dan Siswa

SEMINAR NASIONAL

PENELITIAN, PENDIDIKAN DAN PENERAPAN MIPA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

Sertifikat

No : 1923 / UN34.13 / PS / 2013

diberikan kepada :

Caturiyati

atas partisipasi sebagai : *Pemakalah*

dengan judul :

SECOND ORDER CONE (SOC) DAN SIFAT-SIFAT KENDALA SECOND ORDER CONE PROGRAMMING DENGAN NORMA ∞

Diselenggarakan dalam rangka Dies Natalis UNY ke-49
pada tanggal 18 Mei 2013 dengan tema

" MIPA dan Pendidikan MIPA Untuk Kemandirian Bangsa "

Mengetahui	**Yogyakarta, 18 Mei 2013**
Dekan FMIPA UNY	**Ketua Panitia**
Dr. Hartono	**Dr. Hari Sutrisno**
NIP. 19620329 198702 1 002	**NIP. 19670407 199203 1 002**

FMIPA UGM

1955-2013

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS GADJAH MADA

Sertifikat

Diberikan kepada

Caturiyati

sebagai

Pemakalah

atas partisipasinya dalam **"Seminar Nasional Hasil Penelitian MIPA"**
yang diselenggarakan dalam rangka Dies Natalis FMIPA UGM ke 58
Yogyakarta, 20-21 September 2013

Dekan

Drs. Pekik Nurwantoro, M.S., Ph.D.

Ketua Panitia

Prof. Drs. Mudasir, M.Eng., Ph.D.

No. 419/UN.34.13/PP/2013

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

SERTIFIKAT

Diberikan Kepada

Caturiyati

Jurdik Matematika FMIPA UNY

atas partisipasinya sebagai

PEMAKALAH

dengan judul

"Masalah Dualitas dalam SOCP Norma Satu"

dalam Acara Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika
yang diselenggarakan oleh Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY pada tanggal 9 November 2013

	Yogyakarta, 9 November 2013
Dekan Fakultas MIPA	Ketua Penyelenggara
Dr. Hartono	Musthofa, M.Sc
NIP. 19620329 198702 1 002	NIP. 19801107 200604 1 001

SEMINAR NASIONAL
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA FMIPA UNY

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN RI
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
Karangmalang Yogyakarta 55281 Telp. 0274-586168 Psw 217, 0274-565411(TU),
0274-550227(Dekan), Fax. 0274-548203.
Website: http://fmipa.uny.ac.id, Email : humas_fmipa@uny.ac.id

SURAT TUGAS / IJIN
NO. : 2339 / UN.34.13/KP/2013

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta memberikan tugas / ijin kepada :

Nama	NIP	Pangkat/Gol	Jabatan
Dr. Ali Mahmudi	19730623 199903 1 001	Penata Tk I/ IIId	Lektor
Dr. Agus Maman Abadi	19700828 199502 1 001	Pembina/ IVa	Lektor Kepala
R. Rosnawati, M.Si.	19671220 199203 2 001	Pembina/ IVa	Lektor Kepala
Kuswari Hernawati, M.Kom.	19760414 200501 2 002	Penata Tk I/ IIId	Lektor
Caturiyati, M.Si.	19731218 200003 2 001	Penata Muda Tk I/ IIIb	Lektor
Rosita Kusumawati, M.Sc.	19800707 200501 2 001	Penata Muda/ IIIa	Asisten Ahli
Karyati, M.Si	19720622 199802 2 001	Pembina/ IVa	Lektor Kepala

Keperluan : Sebagai Pemakalah dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika

Tanggal : 3 Juli 2013

Tempat : Program Studi Magister Pendidikan Matematika Universitas Sebelas Maret

Keterangan : Berdasarkan Surat dari Kajurdik, No. : 205/UN.34.13/PP/2013,Tanggal 26 Juni 2013

Surat tugas / ijin ini diberikan untuk dilaksanakan sebaik-baiknya dan mohon melaporkan hasilnya kepada Dekan.

Yogyakarta, 27 Juni 2013
Wakil Dekan I,

Dr. Suyanta
NIP. 19660508 199203 1 002

Tembusan :
1. Dekan FMIPA
2. Kajurdik Matematika FMIPA
3. Kasubag UKP FMIPA
4. Tim CCP
5. Yang bersangkutan

UNIVERSITAS SEBELAS MARET

PROGRAM PASCASARJANA

PROGRAM STUDI MAGISTER PENDIDIKAN MATEMATIKA

SERTIFIKAT

Diberikan Kepada:

CATURIYATI, M.Si.

Atas Partisipasinya sebagai PEMAKALAH dengan judul:

METODE TITIK INTERIOR PADA MASALAH
SECOND ORDER CONE PROGRAMMING DENGAN NORMA 1

pada acara Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika dengan tema "Pengembangan Kompetensi Guru Matematika dalam Rangka Menyongsong Implementasi Kurikulum 2013"

Surakarta, 3 Juli 2013

Direktur	**Ketua Panitia**
Prof. Dr. Ir. Ahmad Yunus, M.S.	**Dr. Riyadi, M.Si.**
NIP. 19610717 198601 1 001	**NIP. 19670116 199402 1 001**

KEMENTRIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
Karangmalang Yogyakarta55281 Telp. +62-0274-586168 Psw. 217, Telp. +62-0274-550227 (Dekan). Fax.0274-548203.
Website : http//fmipa.uny.ac.id, Email:humas_fmipa@uny.ac.id

SURAT TUGAS/IZIN
Nomor : 4280.a/UN34.13/KU/2013

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta memberikan tugas/ijin kepada:

No	Nama	NIP	Jurusan
1	Dr. Sugiman	19650228 199101 1 001	Pendidikan Matematika
2	Karyati, M.Si	19720622 199802 2 001	Pendidikan Matematika
3	Caturiyati,M.Si	19731218 200003 2 001	Pendidikan Matematika
4	Eminugroho R.S., M.Sc	19850414 200912 2 003	Pendidikan Matematika
5	Dwi Lestari, M.Sc	19850513 201012 2 006	Pendidikan Matematika
6	Ilham Rizkianto, M.Sc	19870308 201212 1 003	Pendidikan Matematika

Keperluan : Mengikuti " The IndoMS International Conference on Mathematics and Its Application (IICMA) 2013"

Tanggal : 6 – 8 November 2013

Tempat : Auditorium FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta

Biaya : Bantuan Pendaftaran sebesar Rp.600.000,-/orang

Surat tugas/izin ini diberikan untuk dilaksanakan sebaik-baiknya dan atas perhatiannya diucapkan terimakasih.

Yogyakarta, 4 November 2013
Dekan FMIPA UNY

Dr. Hartono
NIP 19620329 198702 1 002

The IndoMS International Conference on Mathematics and Its Applications (IICMA 2013)

CERTIFICATE

This is to certify that

CATURIYATI WIDODO

has participated as

CONTRIBUTED SPEAKER

In the 2nd IndoMS International Conference on Mathematics and Its Applications 2013
November 6-7, 2013, Yogyakarta-Indonesia

Organized by
IndoMS and Department of Mathematics
Faculty of Mathematics and Natural Sciences
Universitas Gadjah Mada

Prof. Dr. Budi Nurani R.
President IndoMS Period 2012-2014

Dr. Kiki Ariyanti Sugeng
Chairwoman IICMA 2013

FRM/LEMLIT-PROG/09-02
04 NOV. 2008

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT
Alamat: Karangmalang, Yogyakarta. 55281.
Telp. (0274) 550839 Fax. (0274) 518617. e-mail: lppm.uny@gmail.com

BERITA ACARA
PELAKSANAAN SEMINAR PROPOSAL/INSTRUMEN PENELITIAN

1. Nama Peneliti : Caturiyati, M.Si
2. Jurusan/Prodi : Matematika
3. Fakultas : MIPA
4. Skim Penelitian : APDD
5. Judul Penelitian : Solusi Optimisasi SOCP Norma 1 dengan Metode Titik Interior
6. Pelaksanaan : Tanggal 5 Juli 2013 Jam 09.30 – 10.30
7. Tempat : Ruang Sidang Lt 1 LPPM UNY
8. Dipimpin oleh : Ketua Prof. Dr. Sri Atun
   Sekretaris ~~Kus Sri Budiasih, M.Si~~ Dr. Tien Aminatun
9. Peserta yang hadir :
   a. Konsultan : 1 orang
   b. Nara sumber : 13 orang
   c. BPP : 1 orang
   d. Peserta lain : – orang
   Jumlah : 15 orang

SARAN -SARAN

Dr. Suyanta
- Seberapa jauh ini bisa melibatkan mahasiswa? → Hibah disertasi bisa saja minta bantuan mahasiswa.
- Judul sederhana tapi turunannya bisa panjang / kompleks.

Prof. Sri Atun
- Sudah sejauh mana penelitian yg. dilakukan? Karena penelit. disertasi, tentunya sdh. ada pendahuluannya.
- Paper sdh. dipublikasikan atau masih disimpan?

10. Hasil Seminar;

Setelah mempertimbangkan penyajian, penjelasan, argumentasi serta sistematika dan tata tulis, seminar berkesimpulan bahwa proposal penelitian tersebut di atas:

a. Diterima, tanpa revisi/pembenahan usulan/instrumen/hasil
b. Diterima, dengan revisi/pembenahan
c. Dibenahi untuk diseminarkan ulang

Ketua Sidang	Mengetahui Badan Pertimbangan Penelitian	Sekretaris Sidang
		Dr. Tien Aminatun ~~Kun Sri Budiasih, M.Si~~
Prof. Dr. SriAtun	Prof. Dr. Sri Atun	
NIP: 196510121990012001	NIP: 196510121990012001	NIP: 197207121997022001

DAFTAR HADIR SEMINAR PENELITIAN

Jenis Seminar : Desain Proposal/Instrumen Penelitian
Hari, Tanggal : Jum'at, 5 Juli 2013
Pukul : 07.30 - Selesai
Tempat : Ruang Sidang LPPM
Kelompok :

No.	NAMA	GELAR	TANDA TANGAN
1	JAMILAH	Dra. M.Pd.	1.
2	ARISWAN	Dr.M.Si.,DEA.	2.
3	KARYATI	S.Si.,M.Si.	3.
4	NURFINA AZNAM	Prof. Dr. SU.Apt.	4.
5	NOVITA INTAN AROVAH		5.
6	R YOSI APRIAN SARI	M.Si.	6.
7	Kun Sri Budiasih	M.Si	7.
8	Heru Nurcahyo	Dr. drh. , M.Kes	8.
9	TIEN AMINATUN	Dr. M.Si.	9.
10	SITI SULASTRI	Dra. MS.	10.
11	RADEN ROSNAWATI	M.Si	11.
12	CATURIYATI	S.Si.,M.Si.	12.
13	YUNI WIBOWO	M.Pd.	13.
14	RETNA HIDAYAH	MT,Ph.D.	14.
15	RATNA WARDANI	Dr. MT	15.
16	EKO MARPANAJI	Dr. MT	16.
17	SLAMET WIDODO	MT	17.
18	APRI NURYANTO	MT	18.
19	NURYADIN EKO RAHARJO	M.Pd.	19.
20	AGUS SANTOSO	Drs. M.Pd.	20.
21	BADRANINGSIH LASTARIWATI	M.Kes.	21.
22	VALENTINUS LILIK HARIYANTO	Drs. M.Pd.	22.
23	SUTOPO	MT	23.
24	BUDI TRI SISWANTO	Dr. M.Pd.	24.
25	Suyanta	Dr	25.
26	Sri Atun	Prof. Dr	26.
27	Triatmanto	M.Si	27.
28	Amat Jaedun	Dr	28.
29	Siti Hamidah	Dr	29.
30	Tri Hartiti Retnowati	Prof. Dr	30.
31	Wiyatmi	M.Hum	31.
32	Abdul Gafur	Prof. Dr	32.
33	Aman	Dr.	33.
34	Aprilia Tina. L		34.
35	Mami H		35.
36	M. Hamid Anwar .	M.Phe	36.
37			37.
38			38.
39			39.
40			40.

Yogyakarta, 5 Juli 2013
Ketua Sidang

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT
Alamat: Karangmalang, Yogyakarta. 55281.
Telp. (0274) 550839 Fax. (0274) 518617. e-mail: lppm.uny@gmail.com

FRM/LEMLIT-PROG/09-02
04 NOV. 2008

BERITA ACARA
PELAKSANAAN SEMINAR HASIL PENELITIAN DANA BOPTN

1. Nama Peneliti : Caturiyati, S.Si., M.Si.
2. Jurusan/Prodi : Pend. Matematika / Matematika
3. Fakultas : MIPA
4. Skim Penelitian : APDD
5. Judul Penelitian : Solusi Optimisasi SOCP Norma 1 dengan Metode Titik Interior
6. Pelaksanaan : Tanggal 14 Nopember 2012 Jam 07.30 - 14.00
7. Tempat : Ruang Sidang LPPM - UNY
8. Dipimpin oleh : Ketua Dr. Ariswan, M.Si DEA
   Sekretaris Dr. Tien Aminatun
9. Peserta yang hadir : a. Konsultan : .... orang
   b. Nara sumber : 1 orang
   c. BPP : 2 orang
   d. Peserta lain : 11 orang
   Jumlah : 14 orang

SARAN -SARAN

Prof. Mustofa :
- Bgmn. penemuannya dan bgmn. pembuktiannya?
- Ada kemungkinan orang lain mengerjakan hal yg. sama tetapi hasilnya berbeda?

Dr. Ariswan
- Bentuk permukaannya bgmn?
- Optimisasinya di mana?
- Bgmn. menentukan titik dan lintasannya?

10. Hasil Seminar;

Setelah mempertimbangkan penyajian, penjelasan, argumentasi serta sistematika dan tata tulis, seminar berkesimpulan bahwa hasil penelitian tersebut di atas :

a. Diterima, tanpa revisi/pembenahan hasil Penelitian
b. Diterima, dengan revisi/pembenahan
c. Dibenahi untuk diseminarkan ulang

Ketua Sidang	Mengetahui Badan Pertimbangan Penelitian	Sekretaris Sidang
Dr. Arswan, M.S. DEA	Prof. Dr. Nurfina Aznam, SU. Apt.	Dr. Tien Aminatun
NIP: …………	NIP: …………………	NIP: 19720702199802200

DAFTAR HADIR SEMINAR HASIL PELITIAN

Jenis Seminar : Hasil Penelitian
Hari, Tanggal : Kamis, 14 Nopember 2013
Pukul : 07.30 - Selesai
Tempat : Ruang Sidang LPPM
Kelompok :

No.	NAMA	GELAR	TANDA TANGAN	
1	JAMILAH	Dra. M.Pd.	1.	
2	ARISWAN	Dr.M.Si.,DEA.		2. ....
3	KARYATI	S.Si.,M.Si.	3.	
4	NURFINA AZNAM	Prof. Dr.		4. ....
5	NOVITA INTAN AROVAH		5.	
6	R YOSI APRIAN SARI	M.Si.		6. ....
7	Dwi Rahdiyanta	M.Pd	7.	
8	TIEN AMINATUN	Dr. M.Si.		8. ....
9	SITI SULASTRI	Dra. MS.	9.	
10	RADEN ROSNAWATI	M.Si		10. ....
11	CATURIYATI	S.Si.,M.Si.	11.	
12	YUNI WIBOWO	M.Pd.		12. ....
13	Muh. Farozin	Dr.	13.	
14	DWI SISWOYO	Dr.M.Hum.		14. ....
15	EDI PURWANTA	Dr.M.Pd.	15.	
16	Fathur Rahman	M.Si		16. ....
17	Purwandari	M.Pd	17.	
18	SUGIHARTONO			18. ....
19	MIFTAHUDDIN		19.	
20	ACHMAD DARDIRI	Prof. Dr.		20. ....
21	PRATIWI PUJIASTUTI	Dr.	21.	
22	ANIK GUFRON	Prof.		22. ....
23	APRILIA TINA LIDYASARI	M.Pd.	23	
24	SERAFIN WISNI SEPTIARTI			24. ....
25	AJAT SUDRAJAT	Dr	25.	
26	SALIMAN	M.Pd.		26. ....
27	Muh. Nursaban	S.Pd	27.	
28	Dyah Kumalasari	Dr, M.Pd		28. ....
29	Sugi Rahayu	M.Si	29.	
30	Anang Priyanta	M.Hum		30. ....
31	Mukminan	Dr	31.	
32	Sunarso	Dr		32. ....
33	Suparno	Dr	33.	
34				34. ....
35			35.	
36				36. ....
37			37.	
38				38. ....
39			39.	
40				40. ....

Yogyakarta, 14 Nopember 2013
Ketua Sidang

....

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT
Alamat: Karangmalang, Yogyakarta. 55281.
Telp. (0274) 550839 Fax. (0274) 518617. e-mail: lppm.uny@gmail.com

SURAT PERJANJIAN INTERNAL
PELAKSANAAN PENELITIAN DISERTASI DOKTOR
NOMOR : 019/APDD-BOPTN/UN34.21/2013

Pada hari ini selasa tanggal delapan belas bulan Juni tahun dua ribu tiga belas kami yang bertanda tangan di bawah ini :

1. Prof. Dr. Anik Ghufron.	:	Ketua Lembaga Penelitian Dan Pengabdian Kepada Masyarkat Universitas Negeri Yogyakarta yang berkedudukan di Yogyakarta dalam hal ini bertindak untuk dan atas nama perguruan tinggi tersebut; selanjutnya disebut PIHAK PERTAMA.
2. CATURIYATI, S.Si.,M.Si.	:	Ketua Tim Peneliti dari Penelitian Disertasi Doktor, yang beralamat di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta, selanjutnya disebut PIHAK KEDUA.

Surat Perjanjian Internal ini berdasarkan :

1. Undang-undang Republik Indonesia No. 20 Tahun 2003, tentang Sistem Pendidikan Nasional;
2. Undang-undang Republik Indonesia No. 17 Tahun 2003, tentang Keuangan Negara;
3. Undang-undang Republik Indonesia No. 01 Tahun 2004, tentang Perbendaharaan Negara;
4. Undang-undang Republik Indonesia No. 15 Tahun 2004, tentang Pemeriksaan dan Tanggung Jawab Keuangan Negara;
5. Peraturan Presiden No. 47 Tahun 2009, tentang Pembentukan dan Organisasi Kementerian Negara;
6. Keputusan Menteri Pendidikan Nasional No. 975/A3/3/KU/2011, tentang Pengangkatan Pejabat Perbendaharaan/Pengelola Keuangan pada Direktorat Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat;
7. Peraturan Menteri Pendidikan Nasional No. 31 Tahun 2010, tentang Organisasi dan Tata Keuangan Kementerian Pendidikan Nasional;
8. Peraturan Direktur Jenderal Pendidikan Tinggi Kementerian Pendidikan Nasional Republik Indonesia Nomor: 09/DIKTI/Kep/2011, tentang Petunjuk Teknis Kegiatan Penugasan di Lingkungan Direktorat Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat;
9. Surat Perjanjian Penugasan dalam Rangka Pelaksanaan Program Penelitian Tahun Anggaran 2013. DIPA Universitas Negeri Yogyakarta No. : DIPA-023.04.2.189946/2013 tanggal 5 Desember 2012. Revisi ke-3 No.: DIPA-023.04.2.189946/2013 tanggal 6 Mei 2013.
10. Surat Keputusan Rektor UNY Nomor : 266a Tahun 2013, tanggal 1 Mei 2013 tentang penetapan pemenang dan judul penelitian desentralisasi Dana Bantuan Operasional Perguruan Tinggi.

PIHAK PERTAMA dan PIHAK KEDUA secara bersama-sama bersepakat mengikatkan diri dalam suatu Perjanjian Pelaksanaan Penelitian Disertasi Doktor dengan ketentuan dan syarat-syarat sebagai berikut:

Pasal 1

PIHAK PERTAMA memberi tugas kepada PIHAK KEDUA, dan PIHAK KEDUA menerima tugas tersebut sebagai penanggung jawab dan mengkoordinasikan pelaksanaan Penelitian Disertasi Doktor dengan judul dan nama Ketua/Anggota Peneliti sebagai berikut :

Judul	:	Solusi Optimisasi SOCP Norma 1 dengan Metode Titik Interior
Ketua Peneliti	:	CATURIYATI, S.Si.,M.Si.
Anggota	:	1.
		2.
		3.

Pasal 2

(1) PIHAK PERTAMA memberikan dana Penelitian yang tersebut pada Pasal 1 sebesar Rp 30.000.000,00 (Tiga puluh juta rupiah) yang dibebankan kepada Daftar Isian Pelaksanaan Anggaran (DIPA) Uiversitas Negeri Yogyakarta No. : DIPA-023.04.2.189946/2013 tanggal 5 Desember 2012. Revisi ke-3 No.: DIPA-023.04.2.189946/2013 tanggal 6 Mei 2013.

(2) PIHAK KEDUA berhak menerima dana tersebut pada ayat (1) dan berkewajiban menggunakan sepenuhnya untuk pelaksanaan penelitian sebagaimana pasal 1 sampai selesai sesuai ketentuan pembelanjaan keuangan negara.

Pasal 3

Pembayaran dana Penelitian Disertasi Doktor ini akan dilaksanakan melalui Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat UNY dan dibayarkan secara bertahap dengan ketentuan sebagai berikut :

(1) Tahap Pertama 70% sebesar Rp.21.000.000,00 (Dua puluh satu juta rupiah) setelah Surat Perjanjian ini ditandatangani oleh kedua belah pihak.

(2) Tahap Kedua 20% sebesar Rp. 6.000.000,00(Enam juta rupiah) setelah PIHAK KEDUA menyerahkan Laporan Akhir Hasil Pelaksanaan Penelitian kepada PIHAK PERTAMA dalam bentuk hardcopy sebanyak 6 (enam) eksemplar disertai softcopy (CD dalam format "pdf") paling lambat tanggal 20 Nopember 2013.

(3) Tahap Ketiga 10% sebesar Rp 3.000.000,00 (Tiga juta rupiah) setelah PIHAK KEDUA menyerahkan Hasil Kinerja Penelitian kepada PIHAK PERTAMA dalam bentuk hard copy sebanyak 3 (tiga) disertai Sofcopy (CD dalam bentuk format "PDF")

(4) PIHAK KEDUA wajib membuat Laporan Kemajuan Pelaksanaan Penelitian dan Laporan Penggunaan Keuangan sejumlah termin I sebesar 70%, dan diserahkan kepada PIHAK PERTAMA dalam bentuk hardcopy masing-masing 2 (dua) eksemplar paling lambat tanggal 13 September 2013.

(5) PIHAK KEDUA berkewajiban mempertanggungjawabkan pembelanjaan dana yang telah diterima dari PIHAK PERTAMA dan menyimpan bukti-bukti pengeluaran yang telah disesuaikan dengan ketentuan pembelanjaan keuangan Negara.

(6) PIHAK KEDUA berkewajiban mengembalikan sisa dana yang tidak dibelanjakan kepada PIHAK PERTAMA untuk selanjutnya disetorkan ke Kas Negara.

Pasal 4

PIHAK KEDUA berkewajiban untuk:

(1) Mempresentasikan hasil penelitiannya pada seminar yang akan dilaksanakan oleh Direktorat Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, Jakarta;
(2) Mendaftarkan hasil penelitiannya untuk memperoleh HKI;
(3) Memanfaatkan hasil penelitian untuk proses bahan mengajar;
(4) Mempublikasikan hasil penelitiannya pada jurnal yang terakreditasi.
(5) Membayar PPh pasal 21, PPh pasal 22, PPh pasal 23 dan PPn sesuai ketentuan yang berlaku
(6) Mengikuti Seminar dari Awal sampai dengan selesai

Pasal 5

(1) Jangka waktu pelaksanaan penelitian yang dimaksud Pasal 1 ini selama 6 (enam) bulan terhitung mulai 27 Mei 2013 sampai dengan 27 Nopember 2013, dan PIHAK KEDUA harus menyelesaikan Penelitian yang dimaksud dalam Pasal 1 selambat-lambatnya **20 Nopember 2013.**
(2) PIHAK KEDUA harus menyerahkan kepada PIHAK PERTAMA berupa :
   a. Laporan Akhir Hasil Penelitian dalam bentuk hardcopy sebanyak 6 (enam) eksemplar, dan dalam bentuk soft copy (CD dalam format **"*.pdf"**) sebanyak 1 (satu) keping.
   b. Artikel Ilmiah untuk dimasukkan ke Jurnal di melalui Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat UNY, yang terpisah dari laporan sebanyak 2 (dua) eksemplar
(3) Laporan hasil penelitian dalam bentuk hard copy harus memenuhi ketentuan sebagai berikut :
   a. Bentuk/ukuran kertas kuarto
   b. Warna cover COKLAT
   c. Di bagian bawah kulit ditulis :
   Dibiayai oleh DIPA Universitas Negeri Yogyakarta **dengan Surat Perjanjian Penugasan dalam rangka Pelaksanaan Program Penelitian Disertasi Doktor Tahun Anggaran 2013 Nomor: 532a/BOPTN/UN34.21/2013 Tanggal 27 Mei 2013**
(4) Selanjutnya laporan tersebut akan disampaikan ke :
   a. Perpustakaan Nasional Republik Indonesia, Jakarta sebanyak 1 (satu) eks.
   b. PDII LIPI Jakarta sebanyak 1 (satu) eks.
   c. BAPPENAS c.q. Biro APKO Jakarta sebanyak 1 (satu) eks.
   d. Perpustakaan Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat UNY sebanyak 3 (tiga) eks.
(5) Apabila batas waktu habisnya masa penelitian ini PIHAK KEDUA belum menyerahkan Laporan Akhir Hasil Penelitian kepada PIHAK PERTAMA, maka PIHAK KEDUA dikenakan denda sebesar 1‰ (satu permil) setiap hari keterlambatan sampai dengan setinggi-tingginya 5% (lima persen) dari nilai surat Perjanjian Pelaksanaan Hibah Penelitian, terhitung dari tanggal jatuh tempo yang telah ditetapkan sampai dengan berakhirnya pembayaran dana Hibah Penelitian oleh Direktorat Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat, Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.

Pasal 6

(1) Apabila ketua peneliti sebagaimana dimaksud pasal 1 tidak dapat menyelesaikan pelaksanaan penelitian ini, maka PIHAK KEDUA wajib menunjuk pengganti ketua pelaksana sesuai dengan bidang ilmu yang diteliti dan merupakan salah satu anggota tim;

(2) Bagi Peneliti yang tidak dapat menyelesaikan kewajibannya dalam Tahun Anggaran yang sedang berjalan dan waktu proses pencairan biayanya telah berakhir, maka seluruh dana yang belum sempat dicairkan dinyatakan hangus dan kembali ke Kas Negara.
(3) Apabila PIHAK KEDUA tidak dapat melaksanakan tugas sebagaimana dimaksud pada pasal 1 maka harus mengembalikan seluruh dana yang telah diterimanya kepada PIHAK PERTAMA, untuk selanjutnya disetor ke Kas Negara.
(4) Apabila dikemudian hari terbukti bahwa judul-judul penelitian sebagaimana dimakud pada Pasal 1 dijumpai adanya indikasi duplikasi dengan penelitian lain dan/atau diperoleh indikasi ketidakjujuran dan itikad kurang baik yang tidak sesuai dengan kaidah ilmiah, maka penelitian tersebut dinyatakan batal dan PIHAK KEDUA wajib mengembalikan seluruh dana penelitian yang telah diterimanya kepada PIHAK PERTAMA untuk selanjutnya disetor ke Kas Negara.

Pasal 7

Hak Kekayaan Intelektual yang dihasilkan dari pelaksanaan penelitian tersebut diatur dan dikelola sesuai dengan peraturan dan perundang-undangan yang berlaku.

Pasal 8

Hasil penelitian berupa peralatan dan / atau alat yang dibeli dari kegiatan penelitian ini adalah milik negara yang dapat dihibahkan kepada Universitas Negeri Yogyakarta atau Lembaga Pemerintah lain melalui Surat Keterangan Hibah.

Pasal 9

Surat Perjanjian Internal Pelaksanaan Penelitian ini dibuat rangkap 2 (dua), dan masing-masing dibubuhi meterai sesuai dengan ketentuan yang berlaku, dan biaya meterainya dibebankan kepada PIHAK KEDUA.

Pasal 10

Hal-hal yang belum diatur dalam perjanjian ini akan ditentukan kemudian oleh kedua belah pihak secara musyawarah.

PIHAK KEDUA Ketua Peneliti,	PIHAK PERTAMA Ketua LPPM Universitas Negeri Yogyakarta
CATURIYATI, S.Si.,M.Si. NIP 197312182000032001	Prof. Dr. Anik Ghufron NIP. 19621111 198803 1 001